ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 540, 2005, с. 41–44

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 540, 2005, p. 41–44

АНАЛОГИ НЕРІВНОСТІ ВАЛІРОНА ДЛЯ ДЕЯКИХ ДОДАТНИХ РЯДІВ

О. Скасків, О. Трусевич[a], О. Орищин[b]

[a] *Львівський національний університет імені Івана Франка*
[b] *Національний університет "Львівська політехніка" (79013, Львів, вул. С.Бандери 12)*

(Отримано 23 листопада 2004 р.)

Встановлюються умови, за виконання яких для додатних рядів вигляду

$$F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nf(\lambda_nx)\ \text{і}\ F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_ne^{\lambda_nx+\tau(x)\beta_n}$$

існують аналогії нерівності Валірона, де f і τ додатні на $[0;+\infty)$ функції.

Ключові слова: ряд Діріхле, асимптотичні властивості, нерівності Валірона.

2000 MSC: 35C46

УДК: 517.5

Нехай $\lambda=(\lambda_n)$, $0=\lambda_0<\lambda_n\uparrow+\infty$ $(n\to+\infty)$, а $D(\lambda)$ – клас абсолютно збіжних в $\mathbb{C}$ рядів Діріхле

$$F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_ne^{z\lambda_n}.$$

Для $F\in D(\lambda)$ і $x\in\mathbb{R}$ позначимо $M(x,F)=\sup\{|F(x+iy)|:\ y\in\mathbb{R}\}$, $\mu(x,F)=\max\{|a_n|e^{x\lambda_n}:\ n\geq 0\}$. Крім цього, нехай

$$\theta=\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\ln n}{\lambda_n}\ . \qquad (1)$$

Відомо ([1,2]), що для того, щоб для деякого $\theta_0>0$, для кожної функції $F\in D(\lambda)$, кожного $\varepsilon>0$ і для кожного $x\in\mathbb{R}$ виконувалась нерівність

$$M(x,F)\leq A(\varepsilon,\lambda)\mu(x+\theta_0+\varepsilon,F)\ ,$$

де $A(\varepsilon,\lambda)$ – деяка стала, залежна від ε і λ, необхідно і досить, щоб $\theta\leq\theta_0$. Відзначимо, що протилежна нерівність (Коші) $\mu(x,F)\leq M(x,F)$ правильна для всіх $x\in\mathbb{R}$. Виникає природне *питання* про можливість поширення цих тверджень на функціональні ряди загального вигляду. Так в [3] у випадку, коли f ціла функція, $\lambda=(\lambda_n)$ така, як і вище, а ряд

$$F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nf(z\lambda_n),\ a_n>0\ (n\geq 0) \qquad (2)$$

є регулярно збіжний, тобто

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nM_f(r\lambda_n)<+\infty,$$

де $M_f(r)=\max\{|f(z)|:\ |z|=r\}$, то для кожного $\varepsilon>0$ і всіх $r>0$

$$E_F(r)\leq K(\varepsilon)M_F((1+\varepsilon)r),$$

де $K(\varepsilon)>0$ – деяка стала, $E_F(r)=\max\{a_nM_f(r\lambda_n):\ n\geq 0\}$.

У [4, 5] відзначається, що задача встановлення асимптотичних оцінок для цілого списку регулярно збіжних функціональних рядів зводиться до подібного ж питання для додатних рядів вигляду

$$F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_ne^{x\lambda_n+\tau(x)\beta_n},\ \ a_n\geq 0\ \ (n\geq 0), \qquad (3)$$

де $\lambda=(\lambda_n)$, $\beta=(\beta_n)$ – невід'ємні послідовності, а $\tau(x)$ деяка додатна неспадна на $[0;+\infty)$ функція. Клас збіжних для всіх $x\geq 0$ рядів вигляду (3) позначимо через $S(\lambda,\beta,\tau)$.

Правильне таке твердження.

Твердження 1. Якщо $F\in S(\lambda,\beta,\tau)$ і $\theta\leq\theta_0$, де θ визначене в (1), то для всіх $x\geq 0$ виконується нерівність

$$F(x)\leq A\mu(x+\theta_0+\varepsilon,F), \qquad (4)$$

де $\varepsilon>0$ – довільне, $A=A(\varepsilon,\lambda)$ – стала, залежна від ε і λ, а $\mu(x,F)=\max\{a_n\exp(x\lambda_n+\tau(x)\beta_n):\ n\geq 0\}$.

□ *Доведення.* З умови $\theta<+\infty$ випливає, що для довільного $\varepsilon>0$ і всіх $n\geq n_0$

$$\lambda_n\geq\ln n/(\theta+\varepsilon/2),$$

тому збігається ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\exp(-(\theta+\varepsilon)\lambda_n)=A(\varepsilon,\lambda)<+\infty.$$

Звідси,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{(x+\theta+\varepsilon)\lambda_n + \tau(x+\theta+\varepsilon)\beta_n} e^{-(\theta+\varepsilon)\lambda_n - (\tau(x+\theta+\varepsilon)-\tau(x))\beta_n} \le \mu(x+\theta+\varepsilon, F)A(\varepsilon, \lambda). \qquad (5)$$

■

У випадку, коли $\tau(x)$ диференційовна функція така, що $\tau'(x) \ge 1$ $(x > 0)$ або $0 < \tau'(x) \le 1$ $(x > 0)$, умови твердження 1 можна записати дещо інакше.

Твердження 2. Нехай $\tau'(x) \ge 1$ $(x > 0)$. Якщо $F \in S(\lambda, \beta, \tau)$ і виконується умова

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n + \beta_n} = \theta \le \theta_0,$$

то нерівність (4) справджується для всіх $x > 0$, де $\varepsilon > 0$, а $A = A(\varepsilon, \lambda, \beta)$ - стала, залежна від $\varepsilon, \lambda, \beta$.

□ *Доведення.* У рівності з (5) застосуємо нерівність $\tau(x+\theta+\varepsilon) - \tau(x) \ge \theta + \varepsilon$, яку отримуємо з умови $\tau'(x) \ge 1$. Зрозуміло, що у цьому випадку

$$A(\varepsilon, \lambda, \beta) = \sum_{n=0}^{+\infty} exp\{-(\theta+\varepsilon)(\lambda_n + \beta_n)\} < +\infty.$$

■

Зауваження. Якщо виконується умова $0 < \tau'(x) \le 1$, то функція $F(\tau^{-1}(x))$ належить до $S(\beta, \lambda, \tau^{-1})$ (де τ^{-1} - обернена функція до функції τ) і до неї можна застосувати Твердження 2, за яким $F(\tau^{-1}(x)) \le A\mu(\tau^{-1}(x+\theta_0+\varepsilon), F)$, тобто

$$F(x) \le A\mu(\tau^{-1}(\tau(x) + \theta_0 + \varepsilon), F) \quad (x > 0).$$

Попередні прості твердження ілюструють вигляд умов, що забезпечують справедливість аналога нерівності Валірона для рядів вигляду (3). Наступне твердження є подібним до теореми 1.11 [6, с.21], встановленої для цілих рядів Діріхле.

Твердження 3. Нехай $\tau(x) \le x$ $(x > 0)$, а $q(x)$ - невід'ємна неперервна зростаюча на $[0; +\infty)$ функція така, що функції $x - q(x)$ і $\tau(x) - \tau(q(x))$ неспадні і невід'ємні на $[0; +\infty)$. Якщо $F \in S(\lambda, \beta, \tau)$ і

$$K_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \exp\{\lambda_n R_n + \beta_n \tau(R_n)\} < +\infty, R_n =$$

$$= q(\frac{1}{\lambda_n + \beta_n} \ln 1/a_n),$$

то для всіх $x \ge x_0$

$$F(x) < K_1 \mu(q^{-1}(x)) + K_1 + a_0. \qquad (6)$$

□ *Доведення.* Нехай $I_1 = I_1(x) = \{n \ge 1 : \ R_n \le x\}$, $I_2(x) = \mathbb{N} \setminus I_1$. Тоді, оскільки функції $x - q^{-1}(x)$ та $\tau(x) - \tau(q^{-1}(x))$ - незростаючі, то для всіх $n \in I_1(x)$

$$x - q^{-1}(x) \le R_n - q^{-1}(R_n),$$

$$\tau(x) - \tau(q^{-1}(x)) \le \tau(R_n) - \tau(q^{-1}(R_n)).$$

Враховуючи, що $-(\lambda_n + \beta_n)q^{-1}(R_n) = \ln a_n$, маємо

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{n\in I_1} a_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n} &\le \mu(q^{-1}(x)) \textstyle\sum_{n\in I_1} \exp((x - q^{-1}(x))\lambda_n + (\tau(x) - \tau(q^{-1}(x)))\beta_n) \le \\ &\le \mu(q^{-1}(x)) \textstyle\sum_{n\in I_1} a_n \exp(\lambda_n R_n + \beta_n \tau(R_n)) \le K_1 \mu(q^{-1}(x)). \end{aligned} \qquad (7)$$

Зауважимо, що $x < R_n$ для всіх $n \in I_2(x)$, тому

$$\sum_{n\in I_2} a_n \exp(x\lambda_n + \tau(x)\beta_n) \le \sum_{n\in I_2} a_n \exp(R_n\lambda_n + \tau(R_n)\beta_n) \le K_1.$$

Звідси і з нерівності (7) випливає нерівність (6). ■

Твердження, подібне до Твердження 3, отримано також для рядів вигляду (2) в [3, теорема 4]. Наступне Твердження 4 доповнює теорему 4 [3].

Нехай f додатна функція така, що $\ln f(x)$ - додатна опукла вниз зростаюча на $(0; +\infty)$ функція така, що $f(0) = 1$, а $\lambda = (\lambda_n)$ невід'ємна послідовність. Через $H(\lambda, f)$ позначимо клас функцій F зображуваних для всіх $x \ge 0$ рядами вигляду

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f(x\lambda_n), \quad a_n \ge 0 \quad (n \ge 0).$$

Твердження 4. Якщо $F \in H(\lambda, f)$ і виконується умова

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\ln n}{\ln f(\lambda_n)} = \theta \le \theta_0,$$

то для кожного ε і для всіх $x > 0$ справджується нерівність (4), де A стала, залежна від ε, λ, f, а $\mu(x, F) = \max\{a_n f(x\lambda_n) : \ n \ge 0\}$.

□ *Доведення.* З опуклості $\ln f(x)$ і умови $f(0) = 1$ випливає, що

$$\frac{\ln f(ux)}{xu} \ge \frac{\ln f(u)}{u} \quad (x \ge 1, u > 0).$$

Тому $\ln f(xu) \ge x \ln f(u)$ для всіх $x \ge 1$, $u \ge 0$. Крім цього, $\ln f(b) - \ln f(a) \ge \frac{(b-a)}{b} \ln f(b)$ $(0 < a \le b)$.

Звідси, для $\varepsilon > 0$ і $x > 0$

$$\ln f((x+\theta+\varepsilon)\lambda_n) - \ln f(x\lambda_n) \geq$$

$$\geq \frac{(\theta+\varepsilon)\lambda_n}{(x+\theta+\varepsilon)\lambda_n} \ln f((x+\theta+\varepsilon)\lambda_n) \geq (\theta+\varepsilon)\ln f(\lambda_n).$$

Отже,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f((x+\theta+\varepsilon)\lambda_n)\exp\{-(\ln f((x+\theta+\varepsilon)\lambda_n) -$$

$$-\ln f(x\lambda_n))\} \leq \mu(x+\theta+\varepsilon, F)\sum_{n=0}^{+\infty}\exp\{-(\theta+\varepsilon)\ln f(\lambda_n)\}.$$

За умовою (8) $\ln f(\lambda_n) > \ln n/(\theta+\varepsilon/2)$ $(n \geq n_0)$, тому

$$A = \sum_{n=0}^{+\infty}\exp\{-(\theta+\varepsilon)\ln f(\lambda_n)\} < +\infty,$$

і, отже, Твердження 4 доведено. ■

З цитованої теореми з [2] випливає, що отримані твердження покращити, взагалі кажучи, не можна. Проілюструємо це, наприклад, у випадку Твердження 4.

Нехай $H(\lambda) = \bigcup_f H(\lambda, f)$, де об'єднання береться за всіма додатними опуклими зростаючими на $[0, +\infty)$ функціями $\ln f(x)$ і такими, що $f(0) = 1$.

Твердження 5. Для того, щоб для кожної функції $F \in H(\lambda)$ справджувалась при $x > 0$ нерівність (4), необхідно і досить, щоб виконувалась нерівність $\theta \leq \theta_0$, де θ визначене умовою (1).

□ *Доведення.* З опуклості $\ln f(x)$ і умови $f(0) = 1$ випливає, що існує $c > 0$ таке, що $\ln f(x) \geq \geq cx$ $(x \geq x_0)$. Тому з (1) випливає, що умова (8) виконується для кожної функції f. Отже, достатність отримуємо з Твердження 4.

Для того, щоб отримати необхідність умови $\theta \leq \leq \theta_0$, зауважимо, що у випадку, коли $\theta > \theta_0$, за теоремою з [2], цитованою вище, існує функція $F \in D(\lambda)$ з невід'ємними коефіцієнтами a_n, для якої нерівність (4) не може виконуватись навіть на деякій послідовності $x = x_j \to +\infty$. Залишається вибрати $f(x) = e^x$. Тоді $F \in H(\lambda, f)$. Твердження 5 доведено. ■

На завершення висловимо припущення, справедливість якого виглядає досить вірогідною.

Припущення. Умова $\theta \leq \theta_0$ з Твердження 2, а також умова (8) з Твердження 4 є необхідними для справедливості нерівності (4), відповідно, для кожної функції з класу $S(\lambda, \beta, \tau)$ і з класу $H(\lambda, f)$.

Література

[1] Valiron G. Sur les fonctions entieres d'ordre fini et d'ordre null et en particulier les fonctions a correspondance regulere// Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse.–1914.–T.5.–A.117-257.

[2] Притула Я.Я. Про максимум модуля і максимальний член цілого ряду Діріхле// Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. – 1996. – Вип. 43. – С. 25–30.

[3] Винницкий Б.В. О росте целых функций, представленных рядами $\sum_{n=1}^{\infty} d_n f(\lambda_n z)$// Укр. мат. журн. – 1979. – Т. 31, N 5. – С. 537–540.

[4] Осколков В.А. О росте целых функций, представленных регулярно сходящимися рядами // Матем.сб. –1 976. – Т.100, N 2. – С. 312–334.

[5] Скасків О.Б., Трусевич О.М. Теореми типу Бореля для регулярно збіжних функціональних рядів// Мат.методи і фіз.-мех. поля. – 1998. – Т. 41, N 4. – С. 60–63.

[6] Шеремета М.М. Цілі ряди Діріхле. – К.: ІСДО, 1993. – 168 с.

ANALOGS OF THE VALYRON'S INEQUALITY FOR SOME POSITIVE SERIES

O. Skaskiv, O. Trusevych[a], O. Oryshchyn[b]

[a]*Ivan Franko Lviv National University,*
1 Universutets'ka Str., Lviv, UA – 79000, Ukraine
[b]*Lviv Polytechnic National University*
12, S. Bandery Str., Lviv, 79013, Ukraine

We establish conditions under which analogs of the Valirons inequlity for positive series of the form

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f(\lambda_n x) \text{ and } F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{\lambda_n x + \tau(x)\beta_n}$$

are holds, where f and τ are positive on $[0; +\infty)$ functions.

Keywords: Dirichlet series, asymptotic propertis, valirons inequlity.

2000 MSC: 35C46

UDK: 517.5