ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 540, 2005, с. 37–40

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 540, 2005, p. 37–40

ПРО ОДНУ ГРАНИЧНУ ТЕОРЕМУ ДЛЯ ДЕЯКОГО ФУНКЦІОНАЛА ВІД ПОСЛІДОВНОСТІ НЕЗАЛЕЖНИХ ПУАССОНІВСЬКИХ ВЕЛИЧИН

Н. Ружевич, І. Соломка

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 10 листопада 2004 р.)

Знайдено умови, за яких умовний розподіл деякого функціонала від послідовності незалежних випадкових величин, що мають розподіл Пуассона, є асимптотично нормальним.

Ключові слова: метод перевалу, розподіл Пуассона, гранична теорема, асимптотична нормальність, характеристична функція, процес з незалежними приростами

2000 MSC: 60F05, 60E10, 62E20

УДК: 519.21

Нехай задано послідовність незалежних випадкових величин $\{\nu_j\}$, $j = 0, 1, \ldots$, що мають розподіл Пуассона з параметром λ_j відповідно, тобто $P(\nu_j = n) = \frac{\lambda_j}{n!} e^{-\lambda_j}$, $n = 0, 1, \ldots$, $\lambda_j > 0$. З цією послідовністю можна пов'язати два процеси з незалежними приростами $\xi_m = \sum\limits_{j=0}^{m} \nu_j$, $\eta_m = \sum\limits_{j=0}^{m} f_j \nu_j$, де $\{f_j\}$, $j = 0, 1, \ldots$, – послідовність дійсних чисел.

У статті досліджується асимптотична поведінка умовного розподілу функціонала η_m за умови $\xi_m = n$, коли $m, n \to \infty$. Зазначимо, що в [1] і [2] розглянуто таку задачу, причому вважалось, що ν_j — це час перебування в стані j для нерекурентного марківського випадкового блукання, а тому ν_j — незалежні геометрично розподілені випадкові величини, а η_m — адитивний функціонал на цьому блуканні. Зазначимо також, що граничні теореми для адитивних функціоналів на рекурентному випадковому блуканні розглядали в [3].

Надалі припускатимемо, що n і m задовольнятимуть умову

$$n \sim M\xi_m = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j, \quad m, n \to \infty. \tag{1}$$

Як і в [1], [2] для знаходження асимптотичного умовного розподілу величини η_m за умови $\xi_m = n$, коли $m \to \infty$, $n \to \infty$, застосовано метод характеристичних функцій та метод перевалу.

Теорема. *Нехай виконуються умови*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=0}^{m} f_j \lambda_j}{\sqrt{\sum\limits_{j=0}^{m} f_j^2 \lambda_j}} = 0, \tag{2}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_j^2 \lambda_j = \infty. \tag{3}$$

Тоді умовний розподіл величини $\eta_m / \sqrt{D\eta_m}$ за умови $\xi_m = n$ є асимптотично нормальним $N(0, 1)$, тобто

$$\lim_{m\to\infty} M\left\{\exp\left(it\frac{\sum\limits_{j=0}^{m} f_j\nu_j}{\sqrt{\sum\limits_{j=0}^{m} f_j^2\lambda_j}}\right) \middle| \sum_{j=0}^{m} \nu_j = n\right\} = e^{-\frac{t^2}{2}},$$
$$t \in \mathbb{R},$$

для m, n, що задовольняють (1).

□ *Доведення.* Розглянемо сумісну характеристичну функцію випадкових величин η_m і ξ_m, тобто $M\exp(i(u\eta_m + v\xi_m))$. Зробимо заміну змінних $z = e^{iv}$ і позначимо $\varphi_m(u, z) = Me^{iu\eta_m} z^{\xi_m}$. Тоді

$$\varphi_m(u, z) = \exp\left(\sum_{j=0}^{m} \lambda_j \left(e^{iuf_j} z - 1\right)\right).$$

Далі розглянемо умовну характеристичну функцію

$$\varphi_m(u | n) = M\left(e^{iu\eta_m} \middle| \xi_m = n\right) = \frac{\Phi_{m,n}(u)}{\Phi_{m,n}(0)}, \tag{4}$$

де $\Phi_{m,n}(u) = Me^{iu\eta_m} I(\xi_m = n)$.

Оскільки

$$I(\xi_m = n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iv(\xi_m - n)} dv,$$

де інтеграл існує в розумінні середньої квадратичної збіжності, то

$$\Phi_{m,n}(u) = Me^{iu\eta_m} \cdot \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{iv(\xi_m - n)}dv =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ivn} Me^{i(u\eta_m + v\xi_m)}dv =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C z^{-n-1} Me^{iu\eta_m} z^{\xi_m} dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C z^{-n-1}\varphi_{m,n}(u, z)\, dz,$$

якщо $z = e^{iv}$, а C — довільний контур інтегрування, що охоплює точку нуль.

Звідси і з (4) випливає

$$\varphi_m(u|\ n) = \frac{I_{m,n}(u)}{I_{m,n}(0)}, \tag{5}$$

де $I_{m,n}(u) = \int\limits_C z^{-n-1}\exp\left(\sum\limits_{j=0}^{m}\lambda_j\left(e^{iuf_j}z - 1\right)\right)dz$.

Для обчислення $I_{m,n}(u)$ виберемо такий контур C, що складається з відрізка $[A,\ B]$ ($A = x_m - i\rho,\ \ B = x_m + i\rho$) і дуги $\cup BA$ кола з центром у точці 0 та радіусом $\sqrt{x_m^2 + \rho^2}$, якщо коло обходити проти годинникової стрілки, де ρ — достатньо мале додатне число, а вигляд x_m ($x_m > 0$) уточнимо пізніше. Позначимо $C_1 = [A,\ B]$, $C_2 = \cup BA$.

Тоді

$$I_{m,n}(u) = I^1_{m,n}(u) + I^2_{m,n}(u), \tag{6}$$

де

$$I^k_{m,n}(u) = \int\limits_{C_k} e^{\Psi_{m,n}(u,z)}dz, \quad k = 1,\ 2,$$

а $\Psi_{m,n}(u,\ z)$ – однозначна вітка

$$Ln\left(z^{-n-1}\cdot\exp\left(\sum_{j=0}^{m}\lambda_j\left(e^{iuf_j}z - 1\right)\right)\right)$$

на C.

Використаємо метод перевалу для обчислення асимптотики інтеграла $I^1_{m,n}(u)$ (див. 4, с.445).

На відміну від [1], [2] рівняння для знаходження точки перевалу $\frac{\partial}{\partial z}\Psi_{m,n}(u,\ z) = 0$ розв'язується в явному вигляді і точка перевалу $z_{m,n}(u)$, яку для скорочення запису позначимо через $z(u)$, така:

$$z(u) = \frac{n+1}{\sum\limits_{j=0}^{m}\lambda_j e^{iuf_j}}. \tag{7}$$

Зауважимо, що згідно з (1)

$$z(0) = \frac{n+1}{\sum\limits_{j=0}^{m}\lambda_j} \to 1 \quad \text{при} \quad m,\ n\to\infty. \tag{8}$$

Вибираючи контур C, вважатимемо, що $x_m = z(0)$.

Позначимо

$$D_{m,n}(u) = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Psi_{m,n}(u,\ z(u)) = \frac{n+1}{(z(u))^2}.$$

Тоді з (3), (7) при $u = t/\sqrt{D\eta_m}$ для достатньо великих $m,\ n$

$$D_{m,n}(u) \sim D_{m,n}(0) \sim M\xi_m. \tag{9}$$

Обчислимо тепер $I^1_{m,n}(u)$, використовуючи розклад в ряд Тейлора функції $\Psi_{m,n}(u,\ z)$ в околі точки $z(u)$ з точністю до $o\left((z - z(0))^2\right)$. Тоді з (1), (3), (6), (7) і (9) подібно до [1] одержимо, що для $u = t/\sqrt{D\eta_m}$ і фіксованого $t\in R$ при $m\to\infty$

$$I^1_{m,n}(u) \sim \frac{i\sqrt{2\pi}\exp\left(\Psi_{m,n}(u,\ z(u))\right)}{\sqrt{\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Psi_{m,n}(u,\ z(u))}}. \tag{10}$$

Розглянемо тепер $I^2_{m,n}(u)$ і покажемо, що при $u = t/\sqrt{D\eta_m}$

$$I^2_{m,n}(u) = o\left(I^1_{m,n}(u)\right). \tag{11}$$

Для цього розкладемо в ряд Тейлора функцію $\Psi_{m,n}(u,\ z)$ в околі точки $u = 0$ з точністю до $o\left(u^2\right)$. Тоді

$$\left|I^2_{m,n}(u)\right| \le \int\limits_{C_2}\left|\exp\left(\Psi_{m,n}(u,\ z)\right)\right|\ |dz| \sim$$

$$\sim \int\limits_{C_2}\left|\exp\left(\Psi_{m,n}(0,\ z) + u\frac{\partial}{\partial u}\Psi_{m,n}(0,\ z) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{u^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}\Psi_{m,n}(0,\ z)\right)\right|\ |dz| \le L_1\cdot L_2(u),$$

де

$$L_1 = \sup_{z\in C_2}\left|e^{\Psi_{m,n}(0,z)}\right|, \quad L_2(u) =$$

$$= \int\limits_{C_2}\left|\exp\left(u\frac{\partial}{\partial u}\Psi_{m,n}(0,\ z) + \frac{u^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}\Psi_{m,n}(0,\ z)\right)\right||dz|.$$

Тому

$$L_1 = \left|e^{\Psi_{m,n}(0,\, z(0)\pm i\rho)}\right| \sim e^{\Psi_{m,n}(0,\, z(0)) - \frac{\rho^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Psi_{m,n}(0,\, z)}$$

згідно з (8).

Для знаходження асимптотики $L_2(u)$ розкладемо в ряд Тейлора в околі точки $z(0)$ з точністю до $o\left((z - z(0))^2\right)$ функцію

$$u\frac{\partial}{\partial u}\Psi_{m,n}(0,\ z) + \frac{u^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}\Psi_{m,n}(0,\ z).$$

Тоді згідно з (8)

$$L_2(u) \sim \left|\exp\left(u\frac{\partial}{\partial u}\Psi_{m,n}(0,\ z(0)) + \frac{u^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}\Psi_{m,n}(0,\ z(0))\right)\right| \times$$

$$\times \int\limits_{C_2}\left|\exp\left(\frac{1}{2}(z-z(0))^2\left(u\frac{\partial^3}{\partial u\partial z^2}\Psi_{m,n}(0,\ z(0)) + \frac{u^2}{2}\frac{\partial^4}{\partial u^2\partial z^2}\Psi_{m,n}(0,\ z(0))\right)\right)\right|\ |dz| \sim 2\rho\exp\left[-\frac{u^2}{2}\sum_{j=0}^{m} f_j^2\lambda_j\right].$$

Отже, при $u = t/\sqrt{D\eta_m}$

$$\left|I^2_{m,n}(u)\right| = \exp\left(\Psi_{m,n}(0,\ z(0))\right) O\left(\exp\left(-\frac{\rho^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Psi_{m,n}(0,\ z(0))\right)\right). \tag{12}$$

Розглянемо тепер асимптотичну формулу для величини

$$g_{m,n}(u) = \exp\left(\Psi_{m,n}(u,\ z(u)) - \Psi_{m,n}(0,\ z(0))\right) \tag{13}$$

при $u = t/\sqrt{D\eta_m}$. Використовуючи для цього розклад за формулою Тейлора в околі точки $u = 0$ з точністю до $o\left(u^2\right)$, отримаємо

$$g_{m,n}(u) \sim \exp\left\{iu\frac{n+1}{\sum\limits_{j=0}^{m}\lambda_j}\sum_{j=0}^{m} f_j\lambda_j - \frac{u^2}{2}(n+1)\left(\frac{\sum\limits_{j=0}^{m} f_j^2\lambda_j}{\sum\limits_{j=0}^{m}\lambda_j} - \frac{\left(\sum\limits_{j=0}^{m} f_j\lambda_j\right)^2}{\sum\limits_{j=0}^{m}\lambda_j}\right)\right\}.$$

Звідси і з (1), (2) для фіксованого $t \in R$ і достатньо великих $m,\ n$ випливає

$$g_{m,n}\left(\frac{t}{\sqrt{D\eta_m}}\right) \sim e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Тоді звідси і з (10), (12), (13) одержимо

$$\frac{\left|I^2_{m,n}\left(t/\sqrt{D\eta_m}\right)\right|}{\left|I^1_{m,n}\left(t/\sqrt{D\eta_m}\right)\right|} = e^{\frac{t^2}{2}} O\left(\exp\left(-\rho^2 D_{m,n}(0)\right)\right)\sqrt{D_{m,n}\left(\frac{t}{\sqrt{D\eta_m}}\right)} = o(1)$$

згідно з (1), (3) і (9), тобто виконується (11).

Отже, згідно з (6) $I_{m,n}(u) \sim I^1_{m,n}(u) + o\left(I^1_{m,n}(u)\right)$ при $u = t/\sqrt{D\eta_m}$ для достатньо великих $m,\ n$, а значить, згідно з (10)

$$I_{m,n}(u) \sim \frac{i\sqrt{2\pi}\exp\left(\Psi_{m,n}(u,\ z(u))\right)}{\sqrt{\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Psi_{m,n}(u,\ z(u))}}$$

при $u = t/\sqrt{D\eta_m}$ і $m,\ n \to \infty$. Звідси за умовами (5), (9), (13), (14) одержимо

$$\varphi_m\left(\frac{t}{\sqrt{D\eta_m}}\middle|\ n\right) \sim g_{m,n}\left(\frac{t}{\sqrt{D\eta_m}}\right)\cdot\sqrt{D_{m,n}(0)\Big/D_{m,n}\left(\frac{t}{\sqrt{D\eta_m}}\right)} \sim e^{-\frac{t^2}{2}}$$

при $m,\ n \to \infty$, що і доводить теорему. ■

Приклад. Умови теореми виконуються, якщо $f_j,\ \lambda_j,\ j = 0,\ 1, \ldots,$ набувають відповідно таких значень: а) $(-1)^j,\ \lambda\quad (\lambda \in R_+)$; б) $\dfrac{(-1)^j}{j+1},\ \ j+1$; в) $(-1)^j\ (j+1),\ \ \dfrac{1}{j+1}$.

Література

[1] Ружевич Н. А. Про одну граничну теорему для адитивного функціоналу на нерекурентному ланцюгу Маркова // Укр.мат.журн. – 1997. – Т.49, № 2. – С. 262–271.

[2] Ружевич Н. А., Киричинська І. Б. Асимптотична нормальність адитивного функціоналу від марківського випадкового блукання // Математичні студії. – 2003. – Т.20, № 1. – С. 101–106.

[3] Скороход А. В., Слободенюк Н. П. Предельные теоремы для случайных блужданий. – К.: Наук. думка. 1970. – 302 с.

[4] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука. 1987. – 688 с.

ON ONE LIMIT THEOREM FOR SOME FUNCTIONAL FROM INDEPENDENT POISSON'S VALUES SEQUENCE

N. Ruzhevych, I. Solomka

Lviv Polytechnic National University
12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine

Asymptotic normality conditions of some functional conditional distribution from Poisson's independent random values have been established.

Keywords: saddle point method, Poisson's distribution, limit theorem, asymptotic normality, characteristic function, independent increments process

2000 MSC: 60F05, 60E10, 62E20

UDK: 519.21