ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 540, 2005, с. 27–33

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 540, 2005, p. 27–33

ТОЧКОВІ ОСОБЛИВОСТІ ТА КРАЙОВІ ЗНАЧЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ КВАЗІЛІНІЙНОГО ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ

У. Жидик[a], Г. Лопушанська[b]

[a] *Національний університет "Львівська політехніка"*
вул. С.Бандери 12, 79013, Львів, Україна
[b] *Львівський національний університет*
ім. Івана Франка

(Отримано 28 квітня 2005 р.)

Встановлено достатні умови розв'язності у вагових L_1 – просторах нормальної крайової задачі для квазілінійного еліптичного рівняння порядку 2т при заданих на межі області функціях з точковими особливостями та узагальнених функціях із $[C^\infty(S)]'$.

Ключові слова: узагальнена функція, інтегро-диференціальне рівняння, крайова задача.

2000 MSC: 35J40

УДК: 517.956

Деякі автори останніми роками проводили дослідження природи крайових значень розв'язків напівлінійних еліптичних рівнянь. Зокрема у [1] розглянуто крайову задачу вигляду

$$\Delta u = |u|^{q-1}u, \qquad x \in \Omega, \qquad u\Big|_S = g, \tag{1}$$

де g – міра на $\partial\Omega$ і встановлено її однозначну розв'язність у $L_1(\Omega)$ при $q \in (1; q_c)$, $q_c = \dfrac{n+1}{n-1}$ та показано , що при $q > q_c$ не при кожній мірі на $\partial\Omega$ існує розв'язок $u \in L_1(\Omega)$ задачі.

У статті досліджується розв'язність у вагових L_1-просторах нормальної крайової задачі для квазілінійного еліптичного рівняння порядку $2m$ в обмеженій області $\Omega \subset R^n$ з межею S класу C^∞ при заданих функціях, які мають особливості в окремих точках $\bar\Omega$ або на всій межі.

Використовуватимемо позначення:
$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ – мультиіндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $D^\alpha = D^\alpha_x = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_n^{\alpha_n}}$ $\left(D^\alpha = D^{\alpha'}_x = \dfrac{\partial^{|\alpha'|}}{\partial \xi_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial \xi_{n-1}^{\alpha_{n-1}}}\right.$ у розпрямляючих локальних координатах $(\xi_1, ..., \xi_{n-1}, 0)$ точки $x \in S$ [див. 2]).

Нехай $A(x, D) = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$ – лінійний диференціальний еліптичний оператор порядку $2m < n$, $m \in \mathrm{N}$ з нескінченно диференційовними в $\bar\Omega$ коефіцієнтами a_α, $B_j(x, D) = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m_j} b_{j\alpha}(x) D^\alpha$, $j = \overline{1, m}$, $0 \leqslant m_j \leqslant 2m - 1$ – нормальна система крайових диференціальних операторів з нескінченно диференційовними на S коефіцієнтами $b_{j\alpha}$, яка задовольняє умову Лопатинського щодо оператора $A(x, D)$ (див. наприклад [2, ст. 137]).

Нехай A^* – оператор, формально спряжений до A, $\{T_j(x, D)\}_{j=1}^m$ – система крайових диференціальних операторів відповідно порядків μ_j $(\mu_j \leqslant 2m-1)$ з коефіцієнтами з $D(S)$, яка доповнює систему $\{B_j\}_{j=1}^m$ до системи Діріхле порядку $2m$. Тоді існує (див. [2, ст. 139] $2m$ крайових диференціальних операторів $\hat{B}_j$ і $\hat{T}_j$ $(j = \overline{1, m})$ з нескінченно диференційовними на S коефіцієнтами, які однозначно визначаються операторами B_j і T_j $(j = \overline{1, m})$ і мають такі властивості: порядок оператора $\hat{B}_j$ дорівнює $2m - 1 - \mu_j$, а порядок $\hat{T}_j$ дорівнює $2m - 1 - m_j$; система $\left\{\hat{B}_j, \hat{T}_j\right\}_{j=1}^m$ утворює на S систему Діріхле порядку $2m$; правильна формула Гріна

$$\int\limits_\Omega (Au \cdot v - u \cdot A^* v)\, dx = \sum_{j=1}^m \int\limits_S (T_j u \cdot \hat{B}_j v - B_j u \cdot \hat{T}_j v)\, dS,$$

$$u, \ v \in C^\infty(\bar\Omega).$$

I.

Нехай $x_0 \in \bar\Omega$, $\rho(x, x_0)$ – невід'ємна нескінченно диференційовна в $\bar\Omega$ функція, яка в околі точки має порядок відстані $d(x, x_0) = |x - x_0|$, додатна при $x \neq x_0$, вважаємо, що $\rho(x, x_0) \leqslant 1$ для всіх $x \in \bar\Omega$.

Використовуватимемо функціональні простори $D(\bar\Omega) \equiv C^\infty(\bar\Omega)$, $D(S) \equiv C^\infty(S)$, $D'(S)$ – простір лінійних неперервних функціоналів на $D(S)$, через $\langle\varphi, F\rangle$ позначатимемо значення узагальненої функції $F \in D'(S)$ на основній функції $\varphi \in D(S)$ [3].

Для дійсних k та натуральних r введемо клас функцій з точковими особливостями. Розглянемо функціональні простори

$$Y_k(\Omega, x_0) = \left\{\varphi \in D(\bar\Omega) : \hat{B}_j \varphi|_S = 0, \ j = \overline{1, m}; \ A^*\varphi(x) = O(\rho^k(x, x_0)) \text{ при } d(x, x_0) \to 0\right\};$$

$$m_{k,r}(\Omega,x_0)\stackrel{def}{=}\left\{u:\|u\|_{m_{k,r}(\Omega,x_0)}=\sum_{|\gamma|\leqslant r}\int_{\Omega}\rho^{k+|\gamma|}(x,x_0)\,|D^{\gamma}u(x)|\,dx<+\infty\right\};$$

$$\tilde m_{k,r}(\Omega,x_0)\stackrel{def}{=}m_{k,r}(\Omega,x_0)\cap C^r(\Omega);$$

$$\tilde m_{k,r,C}(\Omega,x_0)\stackrel{def}{=}\left\{u\in\tilde m_{k,r}(\Omega,x_0):\|u\|_{m_{k,r}(\Omega,x_0)}\leqslant C\right\}.$$

Позначимо через $\partial_r u=(u,u_{x_1},...,D^{\alpha}u,...)$ вектор довжини $M=M(r)$, компонентами якого є функція u та її похідні до порядку $r\leqslant 2m-1$ включно.

Нехай функція $f_0(x,z)$ визначена і неперервна в $\Omega\times R_r^M$, $(R_r^M=R^{M(r)})$,
$z=(z_{(0,...,0)},z_{(1,...,0)},...,z_{\alpha},...)\in R_r^M,\quad h_0\in L_1(\Omega)$.

Розглянемо крайову задачу

$$A(x,D)\,u(x)=f_0(x,\partial_r u(x))+h_0(x),\quad x\in\Omega,\qquad(2)$$

$$B_j(x,D)\,u(x)=0,\quad x\in S\qquad(3)$$

у припущенні, що ядро відповідної лінійної однорідної крайової задачі $N=\{0\}$.

Далі вважатимемо, що числа $k,\ r$ є задані: $r-$ ціле, $0\leqslant r\leqslant 2m-1$, $k>-n$ (якщо не уточнено окремо).

Означення 1. Розв'язком задачі (2), (3) називається така функція $u\in m_{k,r}(\Omega,x_0)$, що

$$\int_{\Omega}\psi(x)\,[f_0(x,\partial_r u(x))+h_0(x)]\,dx<\infty\quad\forall\psi\in Y_k(\Omega,x_0)\qquad(4)$$

і виконується рівність

$$\int_{\Omega}u(x)\cdot A^*\psi(x)\,dx=\int_{\Omega}f_0(x,\partial_r u(x))\,\psi(x)\,dx+\int_{\Omega}h_0(x)\,\psi(x)\,dx\quad\forall\psi\in Y_k(\Omega,x_0).\qquad(5)$$

Позначимо через

$$G(x,y)=(G_0(x,y),G_1(x,y),...,G_m(x,y))$$

вектор-функцію Гріна задачі (2), (3) (див.[4, 5]). Вона визначена в $\bar\Omega\times\bar\Omega$ при $j=0$, $x\neq y$ і $\bar\Omega\times S$ при $j=\overline{1,m}$, функція $G_0(x,y)$ однозначно визначена у припущенні, що $N=\{0\}$, для довільних мультиіндексів α, γ правильні оцінки

$$|D_x^{\alpha}D_y^{\gamma}G_j(x,y)|\leqslant C_{\alpha,\gamma,j}(1+|x-y|^{m_j+(j)-n-|\alpha|-|\gamma|}),\quad j=\overline{0,m},\qquad(6)$$

де $m_0=2m$, $(j)=\begin{cases}0, & j=0\\ 1, & j=\overline{1,m}\end{cases}$, $C_{\alpha,\gamma,j}$ – додатні сталі.

Як у [6]–[8] можна показати, що розв'язок $u\in m_{k,r}(\Omega,x_0)$ інтегро-диференціального рівняння

$$u(x)=\int_{\Omega}G_0(x,y)[f_0(y,\partial_r u(y))+h_0(y)]\,dy,\ x\in\bar\Omega\qquad(7)$$

є розв'язком задачі (2), (3). Тому з розв'язності рівняння (7) у просторі $m_{k,r}(\Omega,x_0)$ одержуємо розв'язність задачі (2), (3).

Теорема 1. *Нехай $h_0\in L_1(\Omega)$, функція f_0 задовольняє умови:*

1) існує така додатна стала C_0, що для довільної сталої $C>C_0$ і довільної $v\in m_{k,r,C}(\Omega,x_0)$ виконується

$$2\sum_{|\gamma|\leqslant r}L_{\gamma}\int_{\Omega}|f_0(y,\partial_r v(y)|\,dy<C,\qquad(8)$$

де $L_{\gamma}=\max_{y\in\bar\Omega}\int_{\Omega}|D_x^{\gamma}G_0(x,y)|\,dx$, $|\gamma|\leqslant r$;

2) існує така невід'ємна і неперервна функція $\omega_C(t)$ $(t\geqslant 0,\ C>C_0)$, що $\omega_C(0)=0$ і

$$\int_{\Omega}|f_0(y,\partial_r v(y)\ -f_0(y,\partial_r w(y)|\,dy\leqslant\leqslant\omega_C(\|v-w\|_{m_{k,r}(\Omega,x_0)}),\ \forall v,w\in m_{k,r,C}(\Omega,x_0).\qquad(9)$$

Тоді існує розв'язок $u\in m_{k,r}(\Omega,x_0)$ задачі (2), (3).

Нехай, крім того, $h_0\in C^r(\bar\Omega\setminus x_0)$ та для довільної строго внутрішньої підобласті $\Omega'\subset\bar\Omega\setminus x_0$, довільного γ, $|\gamma|\leqslant r$, функції v такої, що $\partial_r v\in L_1(\Omega')^{M(r)}$ та $D^{\beta}v\in C(\Omega')$ при $|\beta|<|\gamma|$, існує така стала $\tilde C'_{\gamma}=\tilde C'_{\gamma}(\Omega',v)>0$, що

$$\int_{\Omega'}(1+|x-y|^{2m-n-|\gamma|})|\,f_0(y,\partial_r v(y)|\,dy\leqslant\leqslant\tilde C'_{\gamma}<+\infty,x\in\bar\Omega',\qquad(10)$$

тоді $u\in\tilde m_{k,r}(\Omega,x_0)$.

□ *Доведення.* Нехай $g\in m_{k,r}(\Omega,x_0)$. Розглянемо інтегро-диференціальне рівняння

$$u(x)-\int_{\Omega}G_0(x,y)\,f_0(y,\partial_r u(y)\,dy=g(x),\ x\in\bar\Omega\backslash x_0\quad(11)$$

у просторі $m_{k,r}(\Omega,x_0)$. Очевидно, що

$$\int_{\Omega}G_0(\cdot,y)\,f_0(y,\partial_r u(y)\,dy\in m_{k,r}(\Omega,x_0)$$

для довільного розв'язку $u\in m_{k,r}(\Omega,x_0)$ рівняння (11).

Розв'язність рівняння (11) у просторі $m_{k,r}(\Omega,x_0)$ за умов (8), (9) та $g\in m_{k,r}(\Omega,x_0)$ встановлена у [9]. Залишається довести, що $g=\int_{\Omega}G_0(\cdot,y)\,h_0(y)\,dy\in\in m_{k,r}(\Omega,x_0)$.

Розглянемо

$$\| g\|_{m_{k,r}(\Omega,x_0)} = \left\| \int_\Omega G_0(\cdot, y)\, h_0(y)\, dy \right\|_{m_{k,r}(\Omega,x_0)} =$$

$$= \int_\Omega \sum_{|\gamma|\leqslant r} \rho^{k+|\gamma|}(x,x_0) \left| D_x^\gamma \int_\Omega G_0(x,y)\, h_0(y)\, dy \right| dx.$$

За лемою 2.6 з [8] при $k \geqslant -2m$ правильні оцінки:

$$\begin{gathered} \int_\Omega \sum_{|\gamma|\leqslant r} \rho^{k+|\gamma|}(x,x_0) |\, D_x^\gamma G_0(x,y)\,|\, dx \leqslant \\ \leqslant C_1(\rho^{k+2m}(y,x_0)+1) \leqslant 2C_1, \end{gathered} \tag{12}$$

де $C_1 = const > 0$. Звідси за теоремою Фубіні при $h_0 \in L_1\,(\Omega)$ одержуємо

$$\left\| \int_\Omega G_0(\cdot, y)\, h_0(y)\, dy \right\|_{m_{k,r}(\Omega,x_0)} < +\infty.$$

Отже, $g \in m_{k,r}(\Omega, x_0)$.

При $|\,\alpha\,| < 2m$ функція

$$D_x^\alpha g(x) = D_x^\alpha \int_\Omega G_0(x,y)\, h_0(y)\, dy =$$

$$= \int_\Omega D_x^\alpha G_0(x,y)\, h_0(y)\, dy$$

і при обмеженій h_0 в $\bar\Omega$ одержуємо $g \in C^s(\Omega\backslash x_0)$ для будь-якого $0 \leqslant s \leqslant 2m-1$, а при $h_0 \in C^1(\bar\Omega)$ також $g \in C^{2m}(\Omega\backslash x_0)$.

Функція $\psi \in Y_k(\Omega, x_0)$ є розв'язком задачі

$$\begin{cases} A^*\psi(x) = O(\rho^k(x,x_0)) \text{ при } |x-x_0| \to 0\,, \\ \hat B_j\psi(x)|_S = 0\,, \quad j = \overline{1,m}\,, \end{cases}$$

отже, має зображення $\psi(y) = \int\limits_\Omega (A^*\psi)(x)\, G_0(x,y)\, dx$.

Використовуючи (12), маємо: $\psi(y) = O(\rho^{k+2m}(y,x_0)+1)$ при $d(y,x_0) \to 0$ і є обмеженою при $k \geqslant -2m$. Тому з оцінок (6) випливає виконання необхідної умови (4) розв'язності задачі (2), (3). Теорема доведена. ■

Зауваження 1. Якщо

$$\begin{gathered} \int_\Omega |\, f_0(y, \partial_r v(y)\,|\, dy \leqslant \varphi(\,\|\, v\,\|_{m_{k,r}(\Omega,x_0)}) \\ \forall v \in m_{k,r,C}(\Omega, x_0), \end{gathered}$$

де $\varphi(t)$ – довільна додатна монотонно неспадна опукла функція, то виконується перша умова теореми 1.

Справді, для довільної функції $v \in m_{k,r,C}(\Omega,x_0)$ маємо $\varphi(\,\|\, v\,\|_{m_{k,r}(\Omega,x_0)}) \leqslant \varphi(C)$ (за монотонністю функції φ). З властивостей функції φ також випливає, що для будь-якої сталої $M > 0$ існує така стала $C_0 > 0$, що для будь-якої сталої $C > C_0$ виконується $M \cdot \varphi(C) < C$, тому одержуємо

$$\begin{gathered} 2\sum_{|\gamma|\leqslant r} L_\gamma \int_\Omega |\, f_0(y, \partial_r v(y)\,|\, dy < 2\varphi(C) \sum_{|\gamma|\leqslant} L_\gamma < C, \\ \forall v \in m_{k,r,C}(\Omega, x_0). \end{gathered}$$

Наслідок 1. Нехай $h_0 \in L_1(\Omega)$, функція $f_0(x,z)$ визначена і неперервна в $\Omega \times R_r^M$ і виконуються умови

$$\begin{gathered} |\, f_0(y,z)\,| \leqslant \tilde C_0 \sum_{s=0}^r \sum_{|\gamma|\leqslant r} |\, z_\gamma|^{q_s}, \\ y \in \Omega, \quad z_\gamma \in R, \end{gathered} \tag{13}$$

$$\begin{gathered} |\, f_0(y,z) - f_0(y,\xi)\,| \leqslant \tilde C_1 \sum_{s=0}^r \sum_{|\,\gamma\,|\leqslant r} |\, z_\gamma - \xi_\gamma|^{q_s}, \\ y \in \Omega, \quad z_\gamma, \xi_\gamma \in R, \end{gathered} \tag{14}$$

де $q_s \in \left(0, \dfrac{n}{k+n+s}\right)$, $s = \overline{0,r}$

Тоді існує розв'язок $u \in m_{k,r,C}(\Omega, x_0)$ задачі (2), (3); $u \in \tilde m_{k,r}(\Omega, x_0)$ при обмеженій в $\bar\Omega$ функції h_0.

Використовуючи нерівність Гельдера, показуємо, що такі функції задовольняють умови теореми 1.

Подібно до [7] досліджуємо, коли розв'язок задачі (2), (3) належить $C^{2m}(\Omega)$. Зокрема правильна така теорема

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1, $r \leqslant 2m-2$, а функції f_0 та h_0, крім того, неперервно диференційовні в $\bar\Omega \times R_r^M$ та в $\bar\Omega$ відповідно. Тоді існує розв'язок $u \in \tilde m_{k,r}(\Omega, x_0)$ задачі (2), (3).*

II.

Нехай тепер $x_0 \in S$, функція $f_0(x,z)$ визначена і неперервна в $\Omega \times R_r^M$, $f_j(x,z)$ – визначені і неперервні в $S \times R_r^M$, $j = \overline{1,m}$, $F_j(x) = \sum\limits_{|l|=0}^{p_j} C_{lj}\, D^l\delta(x-x_0)$, де $C_{lj} = const$, $|l| = \overline{0,p_j}$, $j = \overline{1,m}$.

Розглянемо узагальнену крайову задачу

$$A(x,D)\, u(x) = f_0(x, \partial_r u(x)), \quad x \in \Omega, \tag{15}$$

$$\begin{gathered} B_j(x,D)\, u(x) = f_j(x, \partial_r u(x)) + F_j(x), \\ x \in S, \quad j = \overline{1,m} \end{gathered} \tag{16}$$

у припущенні, що $N = \{0\}$.

Означення 2. Розв'язком задачі (15), (16) називається така функція $u \in m_{k,r}(\Omega, x_0)$, що

$$\begin{gathered} \int_\Omega f_0(x, \partial_r u(x))\, \psi(x)\, dx < \infty, \\ \int_S \hat T_j\psi(x) f_j(x, \partial_r u(x))\; dS < \infty \end{gathered} \tag{17}$$

для довільної $\psi \in Y_k(\Omega, x_0)$ і виконується тотожність

$$\begin{gathered} \int_\Omega u(x) \cdot A^*\psi(x)\, dx = \int_\Omega f_0(x, \partial_r u(x))\, \psi(x)\, dx + \\ + \sum_{j=1}^m \int_S \hat T_j\psi(x) f_j(x, \partial_r u(x))\; dS + \sum_{j=1}^m \langle \hat T_j\psi, F_j\rangle \end{gathered} \tag{18}$$

для довільної $\psi \in Y_k(\Omega, x_0)$.

Як у [6–8] можна показати, що розв'язок $u \in m_{k,r}(\Omega, x_0)$ інтегро-диференціального рівняння

$$u(x) = \int_\Omega G_0(x,y) f_0(y, \partial_r u(y))\, dy + \\ + \sum_{j=1}^m \int_S G_j(x,y) f_j(y, \partial_r u(y))\, dS + \\ + \sum_{j=1}^m \langle G_j(x,y), F_j(y)\rangle \tag{19}$$

є розв'язком задачі (15), (16). Тому з розв'язності рівняння (19) у просторі $m_{k,r}(\Omega, x_0)$ одержуємо розв'язність задачі (15), (16).

Теорема 3. *Нехай* $k_0 = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}(p_j - m_j) - 1$, $k > \max(k_0, 0)$, *функції* f_j *задовольняють умови:*

1) існує така стала $C_0 > 0$, *що для довільної сталої* $C > C_0$

$$2 \sum_{|\gamma|\leqslant r} M_{\gamma 0} \int_\Omega |\, f_0(y, \partial_r v(y)\,|\, dy + \\ +2 \sum_{|\gamma|\leqslant r} \sum_{j=1}^m M_{\gamma j} \int_S |\, f_j(y, \partial_r v(y)\,|\, dS < C \\ \forall v \in m_{k,r,C}(\Omega, x_0) \tag{20}$$

(тут $M_{\gamma j} = C_{\alpha,\gamma,j}$ *при* $|\alpha| = 0$, $|\gamma| \leqslant r$, $j = \overline{1,m}$*);*

2) існують такі неперервні і невід'ємні функції $\omega_{jC}(t)$ $(t \geq 0,\ C > C_0)$, $j = \overline{0,m}$, *що* $\omega_{jc}(0) = 0$ *і*

$$\int_{\Omega_j} |f_j(y, \partial_r v(y)) - f_j(y, \partial_r w(y))| dy \leq \\ \leq \omega_{jc}(||v - w||_{m_{k,r}(\Omega,x_0)}), \quad \forall\, v, \omega \in m_{k,r,c}(\Omega, x_0) \tag{21}$$

де $\Omega_0 = \Omega$, $\Omega_j = S$ *при* $j = \overline{1,m}$.

Тоді існує розв'язок $u \in m_{k,r}(\Omega, x_0)$ *задачі (15), (16).*

□ *Доведення.* Нехай

$$(Hv)(x) = \int_\Omega G_0(x,y) f_0(y, \partial_r v(y))\, dy + \\ + \sum_{j=1}^m \int_S G_j(x,y) f_j(y, \partial_r v(y))\, dS, \quad v \in m_{k,r}(\Omega, x_0).$$

Тоді рівняння (19) матиме вигляд

$$u(x) = (Hu)(x) + g(x), \tag{22}$$

де $g(x) = \sum\limits_{j=1}^m \langle G_j(x,y), F_j(y)\rangle$.

При $v \in m_{k,r,c}(\Omega, x_0)$ оцінимо

$$\|\, Hv\,\|_{m_{k,r}(\Omega,x_0)} \leqslant \sum_{|\gamma|\leqslant r} \int_\Omega \rho^{k+|\gamma|}(x,x_0) \left| D_x^\gamma \int_\Omega G_0(x,y) f_0(y, \partial_r v(y))\, dy \right| dx +$$

$$+ \sum_{|\gamma|\leqslant r} \int_\Omega \rho^{k+|\gamma|}(x,x_0) \left| D_x^\gamma \sum_{j=1}^m \int_S G_j(x,y) f_j(y, \partial_r v(y))\, dS \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|\gamma|\leqslant r} \int_\Omega \rho^{k+|\gamma|}(x,x_0) \left(\int_\Omega |D_x^\gamma G_0(x,y)| \cdot |f_0(y, \partial_r v(y))|\, dy \right) dx +$$

$$\sum_{|\gamma|\leqslant r} \sum_{j=1}^m \int_\Omega \rho^{k+|\gamma|}(x,x_0) \left(\int_S |D_x^\gamma G_j(x,y)| \cdot |f_j(y, \partial_r v(y))|\, dS \right) dx.$$

Переставимо формально порядок інтегрування. Використовуючи (6), лему 2.6 з [8] та умову (20) при $k > \max\limits_{0\leqslant j\leqslant m}(-m_j - 1) = -\min\limits_{0\leqslant j\leqslant m}(m_j) - 1$ одержимо

$$\sum_{|\gamma|\leqslant r} \int_\Omega \left(\int_\Omega \rho^{k+|\gamma|}(x,x_0) |D_x^\gamma G_0(x,y)|\, dx \right) \cdot |f_0(y, \partial_r v(y))|\, dy +$$

$$+ \sum_{|\gamma|\leqslant r} \sum_{j=1}^m \int_S \left(\int_\Omega \rho^{k+|\gamma|}(x,x_0) |D_x^\gamma G_j(x,y)|\, dx \right) \cdot |f_j(y, \partial_r v(y))|\, dS \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|\gamma|\leqslant r} M_{\gamma 0} \int_\Omega \left(\rho^{k+2m+1}(y,x_0) + 1\right) \cdot |f_0(y, \partial_r v(y))|\, dy +$$

$$+ \sum_{|\gamma|\leqslant r} \sum_{j=1}^m M_{\gamma j} \int_S \left(\rho^{k+m_j+1}(y,x_0) + 1\right) \cdot |f_j(y, \partial_r v(y))|\, dS \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{|\gamma|\leqslant} M_{\gamma 0}\int_{\Omega} |\, f_0(y,\partial_r v(y)\,|\, dy + 2\sum_{|\gamma|\leqslant}\sum_{j=1}^{m} M_{\gamma j}\int_{S} |\, f_j(y,\partial_r v(y)\,|\, dS < C.$$

За теоремою Фубіні одержимо $\|Hv\|_{m_{k,r}(\Omega,x_0)} < C$ для довільної функції $v \in m_{k,r,c(\Omega,x_0)}$, а отже $H : m_{k,r,C}(\Omega,x_0) \to m_{k,r,C}(\Omega,x_0)$.

Далі доведення існування розв'язку інтегро-диференціального рівняння (22) у просторі $m_{k,r}(\Omega,x_0)$ при $g \in m_{k,r}(\Omega,x_0)$ та умовах теореми встановлюємо, як у [9].

Покажемо, що $g(x) = \sum_{j=1}^{m} \langle G_j(x,y), F_j(y)\rangle$ задовольняє умови теореми з [9].

Розглянемо

$$\int_{\Omega} \rho^{k+|\gamma|}(x,x_0)|D_x^\gamma g(x)|\,dx = \sum_{j=1}^{m}\sum_{|l|=0}^{p_j} |\,C_{lj}|\int_{\Omega} \rho^{k+|\gamma|}(x,x_0)|D_x^\gamma G_j(x,x_0)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{m} M_j'\left(1+|x-x_0|^{k+m_j+1-p_j}\right)$$

Звідси при $k > k_0 = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}(p_j - m_j) - 1$ одержимо $g \in m_{k,r}(\Omega,x_0)$. ■

III.

Нехай

$$Y_k(\bar\Omega,S) = \left\{\varphi \in D(\bar\Omega) : \hat B_j\varphi|_S = 0,\ j=\overline{1,m};\ A^*\varphi(x) = O(\rho^k(x,x_0)),\quad |x-x_0|\to 0,\ \forall x_0\in S\right\}.$$

$$m_{k,r}(\Omega,S) \overset{def}{=} \left\{ u : \|\, u\,\|_{m_{k,r}(\Omega,S)} = \max_{x_0\in S}\sum_{|\gamma|\leqslant r}\int_{\Omega} \rho^{k+|\gamma|}(x,x_0)\,|\,D^\gamma u(x)\,|\,dx < +\infty \right\}.$$

Згідно з [8, с. 82] при $k \geqslant \max\left[k_0\,,\ \max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}\{2m-m_j-1\}\right]$ простір $Y_k(\bar\Omega,S)$ непорожній.

Нехай функції f_0 та f_j такі, як визначено вище, $F_j \in D'(S)$, порядок сингулярності $s(F_j) \leqslant p_j$, $j=\overline{1,m}$. Розглянемо крайову задачу

$$A(x,D)\,u(x) = f_0(x,\partial_r u(x)),\quad x\in\Omega, \tag{23}$$

$$B_j(x,D)\,u(x) = f_j(x,\partial_r u(x)) + F_j(x),\quad x\in S,\quad j=\overline{1,m} \tag{24}$$

у припущенні, що $N=\{0\}$.

Означення 3. Розв'язком задачі (23), (24) називається така функція $u\in m_{k,r}(\Omega,S)$, що

$$\int_{\Omega} f_0(x,\partial_r u(x))\,\psi(x)\,dx < \infty,$$
$$\int_{S} \hat T_j\psi(x) f_j(x,\partial_r u(x))\,dS < \infty\ \forall\psi\in Y_k(\Omega,S) \tag{25}$$

і виконується рівність

$$\int_{\Omega} u(x)\cdot A^*\psi(x)\,dx = \int_{\Omega} f_0(x,\partial_r u(x))\,\psi(x)\,dx + \sum_{j=1}^{m}\int_{S} \hat T_j\psi(x) f_j(x,\partial_r u(x))\,dS + \sum_{j=1}^{m}\langle \hat T_j\psi, F_j\rangle \tag{26}$$

для довільної $\psi\in Y_k(\Omega,S)$.

Як у [8, с. 86] можна показати, що розв'язність задачі (23), (24) випливає з розв'язності інтегро-диференціального рівняння

$$u(x) = \int_{\Omega} G_0(x,y) f_0(y,\partial_r u(y))\,dy + \sum_{j=1}^{m}\int_{S} G_j(x,y) f_j(x,\partial_r u(y))\,dS + \sum_{j=1}^{m}\langle G_j(x,y), F_j(y)\rangle, \tag{27}$$

у просторі $m_{k,r}(\Omega,S)$.

Теорема 4. Нехай $F_j\in D'(S)$, $s(F_j)\leqslant p_j$, $j=\overline{1,m}$, $k_0 = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}(p_j-m_j)-1$, $k>\max(k_0,0)$, виконуються умови:

1) існує така стала $C_0>0$, що для довільної сталої $C>C_0$

$$2\sum_{|\gamma|\leqslant} M_{\gamma 0}\int_{\Omega} |\, f_0(y,\partial_r v(y)\,|\,dy + 2\sum_{|\gamma|\leqslant}\sum_{j=1}^{m} M_{\gamma j}\int_{S} |\, f_j(y,\partial_r v(y)\,|\,dS < C \quad \forall v\in m_{k,r,C}(\Omega,S) \tag{28}$$

(тут $M_{\gamma j} = C_{\alpha,\gamma,j}$ при $|\,\alpha\,|=0$, $|\,\gamma\,|\leqslant r, j=\overline{1,m}$);

2) існують такі невід'ємні і неперервні функції $\omega_{jC}(t)$ $(t \geqslant 0,\ C > C_0)$, $j = \overline{0,m}$ що $\omega_{jC}(0) = 0$ і

$$\int\limits_{\Omega_j} |\, f_j(y, \partial_r v(y)) - f_j(y, \partial_r w(y)) \,|\, dy \leqslant \leqslant \omega_{jC}\left(\|v - w\|_{m_{k,r}(\Omega,S)}\right) \tag{29}$$
$$\forall v, w \in m_{k,r,C}(\Omega, S),$$
$$\Omega_0 = \Omega, \Omega_j = S \text{ при } j = \overline{1,m}.$$

Тоді існує розв'язок $u \in m_{k,r}(\Omega, S)$ задачі (23), (24).

□ *Доведення.* Так само, як у [9] доводимо, що за умов теореми 4 на функції f_j, $j = \overline{0,m}$ та при $g \in m_{k,r}(\Omega, S)$ інтегро-диференціальне рівняння

$$u(x) - \int\limits_{\Omega} G_0(x,y)\, f_0(y, \partial_r u(y))\, dy - -\sum_{j=1}^{m} \int\limits_{S} G_j(x,y) f_j(y, \partial_r u(y))\, dS = g(x),\ x \in \Omega$$

розв'язне у $m_{k,r}(\Omega, S)$.

Оскільки $\psi(y) = O(\rho^{k+2m}(y, x_0) + 1)$, $\hat{T}_j\psi(x) = O(\rho^{k+2m-1-\mu_j}(x, x_0) + 1)$ при $|x - x_0| \to 0$, для довільного $x_0 \in S$, то $\int\limits_S \hat{T}_j\psi(x) f_j(x, \partial_r u(x))\, dS$ є скінченним за умови (28) та $k \geqslant 0$, тобто виконується необхідна умова (25) розв'язності задачі (23), (24).

Залишається показати, що функція $g(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} \langle G_j(x,y), F_j(y)\rangle$ належить простору $m_{k,r}(\Omega, S)$.

Узагальнені функції F_j мають скінченні порядки сингулярностей $s(F_j) \leqslant p_j$ [3, с. 81], $p_j \geqslant 0$, $j = \overline{1,m}$. Тому існує така стала $L_1 > 0$, що

$$|\langle \varphi, F_j\rangle| \leqslant L_1 \sum_{|\alpha| \leqslant p_j} \max_{y \in S} |D^{\alpha}\varphi(y)|, \quad \varphi \in D(S), \quad j = \overline{1,m}.$$

Розглянемо

$$\int\limits_{\Omega} \rho^{k+|\gamma|}(x, x_0) |D_x^{\gamma} g(x)|\, dx = \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\Omega} \rho^{k+|\gamma|}(x, x_0) |\langle D_x^{\gamma} G_j(x,y),\ F_j(y)\rangle|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant L_1 \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha| \leqslant r} \max_{y \in S} \int\limits_{\Omega} \rho^{k+|\gamma|}(x, x_0) \left|D_y^{\alpha} D_x^{\gamma} G_j(x,y)\right| dx, \quad |\gamma| \leqslant r.$$

Використовуючи оцінки (6), та лему 2.6 з [8], матимемо

$$\|\, g \,\|_{m_{k,r}(\Omega,S)} \leqslant L_2 \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha| \leqslant p_j} \max_{x_0, y \in S} (\rho^{k+m_j-|\alpha|}(x, x_0) + 1).$$

Звідси при $k + m_j - p_j \geq 0$, тобто $k > k_0$, одержуємо $g \in m_{k,r}(\Omega, S)$.
Ми показали, що при $k \leq \{\max\{k_0, 0\}$ функція $g \in m_{k,r}(\Omega, S)$. Теорема доведена. ■

Література

[1] Marcus M., Veron L. Removable singularities and boundary traces// J. Math. Pures Appl. - 2001. - 80, N 1. - P. 879-900.

[2] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. - М.: Мир, 1971. - 372 с.

[3] Шилов Г.Е. Математический анализ.- Второй спецкурс. - М.:Наука, 1965.- 327 с.

[4] Березанский Ю.М., Ройтберг Я.А. Теорема о гомеоморфизмах и функция Грина для общих эллиптических краевых задач//Укр. мат. журн. - 1967. - 19, N 5. - С. 3-32.

[5] Красовский Ю.П. Свойства функций Грина и обобщенное решение эллиптических граничных задач. // Изв. АН СССР. Сер. мат. - 1969. - 33, №1. - С. 109-137.

[6] Лопушанська Г.П. Задача Діріхле для квазілінійного еліптичного рівняння у просторах розподілів. //Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.-1990.- Вип. 34.-С. 26-31.

[7] Жидик У.В., Лопушанська Г.П. Про узагальнені граничні значення розв'язків квазілінійного еліптичного рівняння другого порядку // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. - 2001. - Вип. 59. - С. 144-156.

[8] Лопушанська Г.П. Крайові задачі у просторі узагальнених функцій D': Монографія. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2002. – 287 с.

[9] Жидик У.В., Лопушанська Г.П. Розв'язки інтегро-диференціальних рівнянь у класах функцій із степеневими особливостями//Наук. вісник Чернів. ун-ту. – 2003. – Вип. 160. – Сер. матем. – С. 65–71.

THE POINT SINGULARITIES AND BOUNDARY VALUES OF THE SOLUTIONS OF A QUASILINEAR ELLIPTICAL DIFFERENTIAL EQUATION

U. Zhydyk[a], H. Lopushanska[b]

[a]*"Lviv polytechnic" National University*
12 S.Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine
[b]*Ivan Franko Lviv National University,*
1 Universutets'ka Str., Lviv, UA – 79000, Ukraine

The sufficient conditions of a solubility in the weighted L_1 spaces of a normal boundary problem for $2m$ order quasilinear elliptic equation with given functions with point singularities and generalized functions from $[C^\infty(S)]'$ on boundary domain are obtained.

Keywords: generalized functions, normal boundary problem.

2000 MSC: 35J40

UDK: 517.956