ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 540, 2005, с. 24–26

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 540, 2005, p. 24–26

Δ , C-ЕКВІВАЛЕНТНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ПЕВНИХ ЧИСЛОВИХ МАТРИЦЬ

Д. Білонога

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С.Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 15 квітня 2004 р.)

З метою дослідження класу матриць, напівскалярно еквівалентних довільній поліноміальній матриці з попарно взаємно простими елементарними дільниками у роботі вивчається множина числових Δ матриць, що здійснюють Δ, C-еквівалентні перетворення відповідної числової матриці.

Ключові слова: поліноміальна матриця, напівскалярна еквівалентність, Δ, C-перетворення.

2000 MSC: 30F10

УДК: 512.8

Проблема напівскалярної еквівалентності поліноміальних матриць безпосередньо пов'язана не тільки із вивченням структури поліноміальної матриці, але і з відомою задачею визначення канонічної форми скінченного набору числових матриць відносно перетворень подібності – однією з найстаріших і найскладніших матричних проблем. Нагадаємо спочатку [1], що матриця $B(x)$ називається напівскалярно еквівалентною до матриці $A(x)$, якщо існують неособлива числова матриця L, і оборотна поліноміальна матриця $R(x)$, що

$$B(x) = L A(x)\, R(x).$$

Нехай $A(x)$ і $B(x)$ – дві еквівалентні регулярні поліноміальні матриці з елементами із $C[x]$ і з попарно взаємно простими елементарними дільниками такі, що

$$\begin{aligned} P_A(x)\, A(x)\, Q_A(x) = P_B(x)\, B(x)\, Q_B(x) = \\ = \operatorname{diag}(1, 1, \ldots, \Delta(x)) = S(x), \end{aligned} \tag{1}$$

де $\Delta(x)$ – деякий многочлен, записаний у вигляді

$$\Delta(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \cdots (x - \alpha_t)^{k_t}$$

такий, що $k_1 + k_2 + \ldots + k_t = k$.

Матриці $P_A(x)$ і $P_B(x)$ з рівності (1) називаються лівими перетворювальними матриць $A(x)$ і $B(x)$ до їх канонічної діагональної форми Сміта $S(x)$.

Нагадаємо також теорему.

Теорема 1. *Щоб поліноміальні матриці $A(x)$ і $B(x)$ з одним відмінним від одиниці інваріантним множником $\Delta(x)$ були напівскалярно еквівалентними, необхідно і достатньо, щоб матриці значень останніх рядків довільних лівих перетворювальних цих матриць до канонічної діагональної форми на системі коренів многочлена $\Delta(x)$ були Δ, C-еквівалентними [2].*

Метою роботи є вивчення множини числових Δ матриць, що здійснюють Δ, C-еквівалентні перетворення числових матриць, побудованих за останніми рядками матриць $P_A(x)$ і $P_B(x)$. Для висвітлення структури Δ матриць доведемо спочатку низку допоміжних тверджень.

Лема 1. *Серед множини лівих перетворювальних матриці $A(x)$ до канонічної діагональної форми існує така матриця $P_1(x)$, що* $\deg P_1(x) < \deg \Delta(x)$.

□ *Доведення.* Серед напівскалярно еквівалентних до матриці $A(x)$ [1] існує така трикутна матриця $T(x)$ вигляду:

$$L\, A(x)\, R(x) = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ a_1(x) & a_2(x) & \ldots & \Delta(x) \end{matrix} \right\| = T(x)$$

що степінь многочленів $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_{n-1}(x)$ нижчий за степінь $\Delta(x)$. Тому матриця

$$P_1(x) = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ -a_1(x) & -a_2(x) & \ldots & -a_{n-1}(x) & 1 \end{matrix} \right\| \cdot L$$

і є матрицею із вказаними властивостями, що і слід було довести. ■

Нехай $P(x)$ – фіксована ліва перетворювальна матриці $A(x)$ до канонічної діагональної форми. Відомо [1], що для того, щоб $P_1(x)$ була також лівою перетворювальною матриці $A(x)$ до канонічної діагональної форми необхідно і достатньо, щоб

$$P_1(x) = G(x)\, P(x), \tag{2}$$

де матриця $G(x)$ є оборотною матрицею вигляду

$$G(x)=\left\| \begin{array}{cccc} g_{11}(x) & g_{12}(x) & \dots & g_{1n}(x) \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) & \dots & g_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta(x)g_{n1}(x) & \dots & \Delta(x)g_{nn-1}(x) & g_{nn}(x) \end{array} \right\| \quad (3)$$

Нагадаємо також, що множина всіх таких оборотних матриць утворює групу матриць, що квазікомутують із заданою канонічною діагональною формою, тобто

$$G(x)\,S(x) = S(x)\,H(x) \qquad (4)$$

Цю групу позначимо через $G_S(x)$.

Лема 2. *Щоб матриці $A(x)$ і $B(x)$ з рівності (1) були напівскалярно еквівалентними, необхідно і достатньо, щоб для довільних їхніх лівих перетворювальних існували числова неособлива матриця L та оборотна поліноміальна матриця $G(x)$ з групи $G_S(x)$ такі, що*

$$P_A(x) = G(x)\,P_B(x)\,L^{-1}. \qquad (5)$$

□ *Доведення.*

Необхідність. Нехай $A(x) = L\,B(x)\,R(x)$. Тоді із співвідношення

$$A(x) = P_A^{-1}(x)\,S(x)\,Q_A^{-1}(x) = \\ = L\,P_B^{-1}(x)\,S(x)\,Q_B^{-1}(x)\,R(x)$$

випливає, що матриця $P_B(x)\cdot L^{-1}$, так як і матриця $P_A(x)$, є лівою перетворювальною матриці $A(x)$ до її канонічної форми. Тому вони пов'язані співвідношенням (2)

$$P_A(x) = G(x)\,P_B(x)\cdot L^{-1}.$$

Достатність. Якщо $P_A(x) = G(x)\,P_B(x)\,L^{-1}$, де $G(x) \in G_s(x)$, тоді для матриці $G(x) = P_A(x)\,L\,P_B^{-1}(x)$ справедливе співвідношення (4)

$$P_A(x)\,L\,P_B^{-1}(x)\,S(x) = S(x)\,H(x).$$

Після домноження цієї рівності справа на $Q_B^{-1}(x)$ матимемо

$$L\,P_B^{-1}(x)\,S(x)\,Q_B^{-1}(x) = \\ = P_A^{-1}(x)\,S(x)\,Q_A^{-1}(x)\,Q_A(x)\,H(x)\,Q_B^{-1}(x).$$

Звідси, позначивши $Q_A(x)\,H(x)\,Q_B^{-1}(x) = R^{-1}(x)$, одержуємо потрібну рівність

$$A(x) = L\,B(x)\,R(x),$$

що і слід було довести. ■

Нагадаємо тепер, що значенням неособливої поліноміальної $r \times n$ матриці $G(x)$ з елементами з $C[x]$, записаної у вигляді матричного многочлена

$$G(x) = G_0x^s + G_1x^{s-1} + \ldots + G_s,$$

на системі коренів многочлена $\Delta(x)$ називається числова матриця вигляду

$$M_{G(x)}(\Delta) = \left\| \begin{array}{c} H_1 \\ H_2 \\ \dots \\ H_t \end{array} \right\|, \quad \text{де} \quad H_i = \left\| \begin{array}{c} G(\alpha_i) \\ G'(\alpha_i) \\ \dots \\ G^{(k_i-1)}(\alpha_i) \end{array} \right\|,$$

а $G^j(x)$ – похідна j-го порядку від матриці $G(x)$ [1].

Матриця $M_{G(x)}(\Delta)$ має розміри $rk \times n$, вона залежить від порядку, в якому записані корені многочлена $\Delta(x)$. Тому надалі цей порядок вважатимемо фіксованим.

Лема 3. *Щоб $M_{G_1(x)}(\Delta) = M_{G_2(x)}(\Delta)$, необхідно і достатньо, щоб*

$$G_1(x) = G_2(x) + \Delta(x)G_3(x).$$

□ *Доведення.* Необхідність. Якщо $M_{G_1(x)}(\Delta) = M_{G_2(x)}(\Delta)$, то $M_{G_1(x)}(\Delta) - M_{G_2(x)}(\Delta) = 0$.

Відомо [1], що для значень матриць на системі коренів многочлена справедлива рівність

$$M_{G_1(x)-G_2(x)}(\Delta) = M_{G_1(x)}(\Delta) - M_{G_2(x)}(\Delta)$$

тому з рівності $M_{G_1(x)-G_2(x)}(\Delta) = 0$ випливає, що многочлен $G_1(x) - G_2(x)$ кратний многочлену $\Delta(x)$.

Доведення достатності базується на означенні значення поліноміальної матриці $G(x)$ на системі коренів многочлена $\Delta(x)$ і є очевидним. ■

Нехай $d(x)$ – довільний многочлен із $C[x]$. Через $d[\Delta]$ позначимо числову $k \times k$ матрицю вигляду $d[\Delta] = \mathrm{diag}\,(d_{k_1}[\alpha_1], d_{k_2}[\alpha_2], \ldots, d_{k_t}[\alpha_t])$, де

$$d_{k_i}[\alpha_i] = \left\| \begin{array}{ccccc} C_0^0 d(\alpha_i) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ C_1^0 d'(\alpha_i) & C_1^1 d(\alpha_i) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{k_i-1}^0 d^{(k_i-1)}(\alpha_i) & C_{k_i-1}^1 d(\alpha_i) & \dots & \dots & C_{k_i-1}^{k_i-1} d(\alpha_i) \end{array} \right\|; \quad C_n^m = \binom{n}{m}.$$

Означення 1. Числова матриця W називається Δ-матрицею, якщо для неї існує многочлен $d(x)$ такий, що $W = d[\Delta]$.

Основним результатом цієї роботи є наступна теорема.

Теорема 2. *Матриця W є Δ-матрицею для фіксованого многочлена $\Delta(x)$, тоді і лише тоді, коли для неї існує многочлен $d(x)$ такий, що $W = d(\tilde{J})$, де $\tilde{J} = \mathrm{diag}\,(\tilde{J}_1, \tilde{J}_2, \ldots, \tilde{J}_t)$, а*

$$\tilde{J}_i = \left\| \begin{array}{cccc} \alpha_i & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1!}{0!} & \alpha_i & \dots & 0 \\ 0 & \frac{2!}{1!} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \frac{(k_i-1)!}{(k_i-2)!} & \alpha_i \end{array} \right\|.$$

□ *Доведення.* Необхідність. Оскільки $C_m^p = \dfrac{m!}{p!(m-p)!}$, то $d_{k_i}(\alpha_i)$ можна виразити таким добутком:

$$d_{k_i}(\alpha_i) = T_i \cdot \begin{Vmatrix} \dfrac{d(\alpha_i)}{0!} & 0 & \ldots & 0 \\ \dfrac{d'(\alpha_i)}{1!} & \dfrac{d(\alpha_i)}{0!} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{d^{(k_i-1)}(\alpha_i)}{(k_i-1)!} & \dfrac{d^{(k_i-2)}(\alpha_i)}{(k_i-2)!} & \ldots & \dfrac{d(\alpha_i)}{0!} \end{Vmatrix} \cdot T_i^{-1} =$$

$$= T_i \cdot d(J_i) \cdot T_i^{-1},$$

де $d(J_i)$ – значення многочлена $d(x)$ на клітці Жордана, яка відповідає елементарному дільнику $(x - \alpha_i)$; $T_i = \operatorname{diag}(0!; 1!; \ldots; (k_i - 1)!)$; $i = 1; 2; \ldots; t$. Звідси $d[\Delta] = d(\tilde{J})$.

Достатність. Нехай $W = d(\tilde{J}) = T\, d(J)\, T^{-1}$, де $d(\tilde{J}) = \operatorname{diag}(d(\tilde{J}_1); \ldots; d(\tilde{J}_t))$; $T = \operatorname{diag}(T_1; T_2; \ldots, T_t)$; $d(J) = \operatorname{diag}(d(J_1); \ldots; d(J_t))$. Це значить, що за відомими значеннями $d(\alpha_1)$; $d'(\alpha_1)$; ...; $d^{(k_1-1)}(\alpha_1)$; $d(\alpha_2)$; $d'(\alpha_2)$; ...; $d^{(k_2-1)}(\alpha_2)$; ...; $d^{(k_t-1)}(\alpha_t)$ достатньо відновити многочлен $d(x)$, що завжди можна зробити. Це і означає, що для матриці W існує многочлен $d(x)$ такий, що $W = d[\Delta]$, тобто W є Δ-матрицею. ■

Лема 4. *Матриця $d(\Delta) = 0$ тоді і лише тоді, коли многочлен $d(x)$ ділиться на $\Delta(x)$:*

$$d(x) = \Delta(x)\, f(x).$$

□ *Доведення.* Необхідність. Нехай $d(\Delta) = 0$. Значить, $d(\tilde{J}) = 0$, тобто $\tilde{J}$ є коренем многочлена $d(x)$, а тому $d(x)$ ділиться на мінімальний многочлен матриці $\tilde{J}$ [3]. Нагадаємо, що мінімальним многочленом матриці називається ненульовий многочлен найнижчого степеня зі старшим коефіцієнтом 1, який має цю матрицю своїм коренем. Але ж мінімальний многочлен матриці $\tilde{J}$ збігається з характеристичним, тому $d(x)$ ділиться на $\Delta(x)$. Доведення достатності очевидне. ■

Теорема 3. *Якщо W є Δ-матрицею, то для неї існує единий многочлен $d(x)$ степеня, нижчого, ніж степінь $\Delta(x)$ такий, що $d[\Delta] = W$.*

□ *Доведення.* Доведемо спочатку, що такий многочлен існує. Дійсно оскільки W є Δ-матрицею, то для неї існує многочлен $d_1(x)$ такий, що $d_1[\Delta] = W$. Якщо

$\deg d_1 \geqslant \deg \Delta(x)$, тоді подамо $d_1(x)$ у вигляді

$$d_1(x) = \Delta(x)\, f(x) + d(x),$$

де $\deg d(x) < \deg \Delta(x)$. Тоді

$$d_1[\Delta] = \Delta[\Delta]\, f[\Delta] + d[\Delta] = d[\Delta] = W,$$

що і слід було довести.

Для доведення єдиності припускаємо існування двох многочленів $a(x)$ і $b(x)$ таких, що

$\deg a(x) < \deg \Delta(x)$; $a[\Delta] = W$, $\deg b(x) < \deg \Delta(x)$; $b[\Delta] = W$. Тоді їхня різниця $a(x) - b(x) = c(x)$ є такою, що $c[\Delta] = 0$. Оскільки мінімальний многочлен матриці $\tilde{J}$ збігається з характеристичним, то $\Delta(x)$ є многочленом найменшого степеня таким, що $\tilde{J}$ є його коренем, але ж $\deg c(x) < \deg \Delta(x)$ звідки випливає, що $c(x) = 0$. ■

Література

[1] Казімірський П.С. Розклад матричних многочленів на множники. – К.:, Наукова думка, 1981. – 224 с.

[2] Казімірський П.С., Білонога Д.М. Напівскалярна еквівалентність поліноміальних матриць з попарно взаємно простими елементарними дільниками. // Доповіді АН УРСР,1990, № 4, с. 8–9.

[3] Мальцев А.І. Основы линейной алгебры. – М.: Наука , 1970. – 400 с.

Δ, C-EQUIVALENT TRANSFORMATIONS OF THE CERTAIN NUMERICAL MATRICES

D. Bilonoga

"Lviv polytechnic" National University
12 S.Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine

The set of numerical matrices, which are realised Δ, C-equivalent transformations of certain way builded numerical matrices is research in the paper with the aim to studying the class of the matrices, which are semiscalar equivalent to some polynomial matrix with the relatively prime elementary divisors.

Keywords: polynomial matrix, semiscalar equivalency, Δ, C transformations.

2000 MSC: 30F10

UDK: 512.8