ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 540, 2005, с. 73–76

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 540, 2005, p. 73–76

ПРО ДВОСТОРОННЮ АПРОКСИМАЦІЮ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Б. Шувар, С. Ментинський

Національний університет "Львівська політехніка"
(79013, Львів, вул. С.Бандери 12)

(Отримано 28 березня 2004 р.)

Побудований і досліджений новий двосторонній аналог числово-аналітичного методу послідовних наближень А.М.Самойленка для відшукання розв'язків лінійної крайової задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь. Конструкція послідовних наближень та умови їх збіжності до розв'язку задачі грунтуються на властивості B-монотонності (за Ю.В.Покорним) правих частин відповідних рівнянь.

Ключові слова: двосторонні методи, крайові задачі, звичайні диференціальні рівняння.

2000 MSC: 60J10?

УДК: 517.927

Вступ

Двосторонні ітераційні методи, теорія яких започаткована С.О.Чаплигіним, мають важливі переваги перед іншими ітераційними методами, оскільки наближення, отримані за їх допомогою, дозволяють охопити вилкою шуканий розв'язок зверху і знизу, і монотонно звужувати отриману вилку. Крім зручності апостеріорних оцінок, це дозволяє певною мірою охарактеризувати поведінку шуканого розв'язку. Проте їх використання обмежене кількома несприятливими чинниками. Основні з них неопуклість та немонотонність, а також припущення про диференційовність відповідних операторів. У [1–3] запропоновані нові підходи до побудови двосторонніх методів для рівнянь з немонотонними та неопуклими правими частинами. У [3], зокрема, досліджено нові двосторонні методи, що не вимагають диференційовності відповідних операторів. При використанні цих методів для апроксимації розв'язків граничних задач слід враховувати їх специфіку, зумовлену потребою побудови операторів відповідної структури в лінеаризованих частинах алгоритмів, для чого зручно використовувати, зокрема, конструкцію числово-аналітичного методу А.М.Самойленка [4].

I. Постановка задачі

Досліджуватимемо двосторонню апроксимацію розв'язків системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \tag{1}$$

що задовольняють лінійні крайові умови

$$\alpha x(0) + \beta x(T) = \gamma. \tag{2}$$

Тут x – елемент простору $C_{R^m}[0;T]$, напівупорядкованого конусом додатних елементів; $t \in [0;T]$; $f : D = [0;T] \times [a;b] \to C_{R^m}[0;T] \quad a, b \in C_{R^m}[0;T]$; γ – m-вимірний сталий вектор; α і β – сталі матриці порядку $m \times m$.

Задача (1), (2) за дещо інших припущень досліджена в [5] (див. також [6,7]), зокрема, в [5] використовується припущення про можливість зображення правої частини рівняння (1) у вигляді неперервної за сукупністю аргументів гетеротонної функції $F(t,x,x)$, що певним чином звужує межі застосовності побудованого алгоритму. У [6] запропоновано двосторонній алгоритм, що спирається на ідеї і методику із [1–3] та із [4] і досліджено умови квадратичної збіжності запропонованого алгоритму. Використання двостороннього алгоритму із [6] може утруднюватися, наприклад, через необхідність розв'язування на кожному кроці ітераційного процесу системи інтегральних рівнянь, що нерідко може бути задачею складнішою, ніж сама задача (1), (2). Одним із шляхів уникнення таких труднощів можна вважати алгоритми, побудовані на використанні властивості B-монотонності (в термінології Ю.В.Покорного [8]) правої частини рівняння. При цьому вдається розширити (порівняно з [5]) клас задач, до яких застосовні двосторонні методи, з одного боку, і обійтися без розв'язування системи інтегральних рівнянь на кожному кроці ітераційного процесу, з іншого.

II. Отримані результати та їх обгрунтування

Вважатимемо правдивими такі припущення.

1) Матриця $\alpha + \beta$ неособлива.

2) Задана неперервна за сукупністю аргументів функція $F(t,y,z)$ $(y, z, x \in [a,b] \quad t \in [0,T])$, для якої

$F(t,x,x) \equiv f(t,x)$.

3) Задані матриці $A_1(t,y,z) = \left\{a_{ij}^{(1)}(t,y,z)\right\}$, $B_2(t,y,z) = \left\{b_{ij}^{(2)}(t,y,z)\right\}$ $(i,j=1...m)$ неперервних за сукупністю аргументів незростаючих за y неспадних за z додатних при $y,z \in [a,b]$, $t \in [0,T]$ дійсних функцій, для яких з нерівностей $y \le z$ $(t \in [0,T], x,y,z \in [a,b])$ випливають співвідношення

$$\begin{aligned} &-A_1(t,y,z)(z-y) \le F(t,z,x) - F(t,y,x), \\ &F(t,x,z) - F(t,x,y) \le B_2(t,y,z)(z-y). \end{aligned} \tag{3}$$

Будуємо ітераційний процес

$$\begin{aligned} y_{n+1}(t) &= \tilde\Lambda\left[F_1(t,y_n,z_n); F_2(t,y_n,z_n)\right] + \\ &\quad + (\alpha+\beta)^{-1}\gamma, \\ z_{n+1}(t) &= \tilde\Lambda\left[F_2(t,y_n,z_n); F_1(t,y_n,z_n)\right] + \\ &\quad + (\alpha+\beta)^{-1}\gamma, \end{aligned} \tag{4}$$

де

$$\begin{aligned} F_1(t,y,z) &= (A_1(t,y,z)+B_2(t,y,z))(y-z)+F(t,y,z), \\ F_2(t,y,z) &= (A_1(t,y,z)+B_2(t,y,z))(z-y)+F(t,z,y), \end{aligned}$$

а оператор $\tilde\Lambda$ визначено формулою

$$\begin{aligned} \tilde\Lambda\left[\varphi(t); \psi(t)\right] &= \alpha_+ \int_0^t \varphi(s)\,ds + \beta_- \int_T^t \varphi(s)\,ds + \\ &+ \alpha_- \int_0^t \psi(s)\,ds + \beta_+ \int_T^t \psi(s)\,ds, \end{aligned}$$

де α_+, α_- – матриці, утворені відповідно з додатних та від'ємних компонент матриці $(\alpha+\beta)^{-1}\alpha$, а β_+, β_- – з додатних та від'ємних компонент матриці $(\alpha+\beta)^{-1}\beta$.

Теорема 1. *Нехай задані такі початкові наближення $y_0, z_0 \in [a,b]$, що для y_1, z_1, визначених за формулами (4), справджуються співвідношення*

$$y_0 \le y_1 \le z_1 \le z_0, \tag{5}$$

а на відрізку $[y_0, z_0]$ існує хоча б один розв'язок $x^*(t)$ задачі (1), (2). Тоді для послідовностей $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, визначених за формулами (4) справджуються співвідношення

$$y_n \le y_{n+1} \le x^* \le z_{n+1} \le z_n (n = 0,1,...). \tag{6}$$

□ *Доведення.* З припущення про правдивість нерівностей $y_n \le x^*$ та $x^* \le z_n$ отримуємо

$$\begin{aligned} x^* - y_{n+1} &= \tilde\Lambda\left[F(t,x^*,x^*) - F(t,y_n,z_n); F(t,x^*,x^*) - \right. \\ &\left. - F(t,z_n,y_n)\right] - \tilde\Lambda\left[(A_1(t,y_n,z_n) + B_2(t,y_n,z_n)) \times \right. \\ &\times (y_n - z_n); (A_1(t,y_n,z_n) + B_2(t,y_n,z_n))(z_n - y_n)\big] \ge \\ &\ge \tilde\Lambda\left[-A_1(t,y_n,x^*)(x^*-y_n) - B_2(t,x^*,z_n)(z_n-x^*);\right. \\ &\left. A_1(t,x^*,z_n)(z_n-x^*) + B_2(t,y_n,x^*)(x^*-y_n)\right] - \\ &- \tilde\Lambda\left[(A_1(t,y_n,z_n) + B_2(t,y_n,z_n))(y_n-z_n);\right. \\ &\left. (A_1(t,y_n,z_n) + B_2(t,y_n,z_n))(z_n-y_n)\right] \ge \\ &\ge \tilde\Lambda\left[A_1(t,y_n,z_n)(z_n-x^*) + B_2(t,y_n,z_n)(x^*-y_n);\right. \\ &\left. A_1(t,y_n,z_n)(y_n-x^*) + B_2(t,y_n,z_n)(x^*-z_n)\right] \ge \theta, \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} z_{n+1} - x^* &\ge \tilde\Lambda\left[A_1(t,y_n,z_n)(x^*-y_n) + B_2(t,y_n,z_n) \times \right. \\ &\times (z_n - x^*); A_1(t,y_n,z_n)(x^*-z_n) + \\ &\left. + B_2(t,y_n,z_n)(y_n-x^*)\right] \ge \theta, \end{aligned}$$

тобто нерівності $y_{n+1} \le x^*$, $z_{n+1} \ge x^*$. У подібний спосіб можна показати, що з пари нерівностей $y_{n-1} \le y_n$, $z_n \le z_{n-1}$ випливають нерівності $y_n \le y_{n+1}$ та $z_{n+1} \le z_n$. Враховуючи принцип математичної індукції, вважаємо теорему доведеною. ■

Нехай в області $D' = [0;T] \times [a;b] \times [a;b]$ функція $F(t,y,z)$ – обмежена:

$$|F(t,y,z)| \le M. \tag{7}$$

Припустимо, що матриці $A_1(t,y,z)$ та $B_2(t,y,z)$ такі, що існує матриця скінченних невід'ємних дійсних елементів

$$\begin{aligned} M_{AB} &= \left\{m_{ij}^{(AB)}\right\}, \\ m_{ij}^{(AB)} &= \max_{\substack{t \in [0;T] \\ y,z \in [a;b]}} \left|a_{ij}^1(t,y,z) + b_{ij}^2(t,y,z)\right|. \end{aligned} \tag{8}$$

Неважко переконатися, що при

$$\begin{aligned} a + T(M_{AB}(b-a) + M) &\le (\alpha+\beta)^{-1}\gamma \\ &\le b - T(M_{AB}(b-a) + M), \end{aligned} \tag{9}$$

за початкові наближення в умовах теореми 1 можна прийняти

$$y_0(t) = a, \quad z_0(t) = b,$$

Припустимо, що:

4) справджуються співвідношення (9), де вектор M та матриця M_{AB} визначені співвідношеннями (7), (8);

5) задані матриці $A_2(t,y,z) = \left\{a_{ij}^{(2)}(t,y,z)\right\}$, $B_1(t,y,z) = \left\{b_{ij}^{(1)}(t,y,z)\right\}$ $(i,j=1...m)$ неперервних за сукупністю аргументів, додатних при $y,z \in [a,b]$, $t \in [0,T]$ дійсних функцій, для яких з нерівностей $y \le z$ $(t \in [0,T], x,y,z \in [a,b])$ випливають співвідношення

$$\begin{aligned} &F(t,z,x) - F(t,y,x) \le B_1(t,y,z)(z-y), \\ &-A_2(t,y,z)(z-y) \le F(t,x,z) - F(t,x,y). \end{aligned} \tag{10}$$

Нехай $Q = \{q_{ij}\}$ – числова матриця розміру $m \times m$, де

$$\begin{aligned} q_{ij} = \max_{\substack{t \in [0;T] \\ y,z \in [a;b]}} &\left(2\left(a_{ij}^{(1)}(t,y,z) + b_{ij}^{(2)}(t,y,z)\right) + \right. \\ &\left. + a_{ij}^{(2)}(t,y,z) + b_{ij}^{(1)}(t,y,z)\right). \end{aligned}$$

Теорема 2. *Нехай в області D справджуються умови 1)-5), а також існує нерівність $\|TQ\| \leq r < 1$. Тоді на відрізку $[a;b]$ існує єдиний в D розв'язок x^* задачі (1), (2), до якого, рівномірно щодо $t \in [0;T]$ збігаються послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, визначені за формулами (4), починаючи з $y_0 = a$, $z_0 = b$. При цьому справджуються співвідношення*

$$a=y_0 \leq y_n \leq y_{n+1} \leq x^* \leq z_{n+1} \leq z_n \leq z_0=b \qquad (11)$$

($t \in [0,T]$, $n = 1,2,...$).

□ *Доведення.* Правдивість (9) спричинює правдивість співвідношень (5) в умовах теореми 1, тому з правдивості умов 1)–3) отримуємо нерівності (11) для $n = 1,2,...$, які дають підстави стверджувати існування границь $y^* = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, $z^* = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ та правдивість співвідношень

$$y^* \leq x^* \leq z^*. \qquad (12)$$

За умовою 5), враховуючи (11), отримаємо

$$z_{n+1} - y_{n+1} = \tilde{\Lambda}\left[(A_1(t,y_n,z_n) + B_2(t,y_n,z_n)) \times \right.$$
$$\times (z_n - y_n); (A_1(t,y_n,z_n) + B_2(t,y_n,z_n))(y_n - z_n)] -$$
$$-\tilde{\Lambda}\left[(A_1(t,y_n,z_n) + B_2(t,y_n,z_n))(y_n - z_n);\right.$$
$$(A_1(t,y_n,z_n) + B_2(t,y_n,z_n))(z_n - y_n)] +$$
$$+\tilde{\Lambda}\left[F(t,z_n,y_n) - F(t,y_n,z_n); F(t,y_n,z_n) -\right.$$
$$-F(t,z_n,y_n)] \leq (\alpha+\beta)^{-1}\alpha\int\limits_0^T (2(A_1(s,y_n,z_n) +$$
$$+B_2(s,y_n,z_n)) + A_2(s,y_n,z_n) + B_1(s,y_n,z_n))(z_n -$$
$$-y_n)\,ds + (\alpha+\beta)^{-1}\beta\int\limits_0^T (2(A_1(s,y_n,z_n) + B_2(s,$$
$$y_n,z_n)) + A_2(s,y_n,z_n) + B_1(s,y_n,z_n))(z_n - y_n)\,ds.$$

Тоді, оскільки $z_{n+1} - y_{n+1} \geq \theta$ та $z_n - y_n \geq \theta$, матимемо

$$\|z_{n+1} - y_{n+1}\| \leq \left\|\int\limits_0^T Q(z_n(s) - y_n(s))\,ds\right\| \leq$$
$$\leq r\,\|z_n - y_n\|,$$

де $\|TQ\| \leq r$, або

$$\|z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t)\| \leq r^n \|z_0(t) - y_0(t)\| = r^n \|a-b\|,$$

Звідси і з (12) при $r < 1$ випливає рівність $y^*=x^*=z^*$. Доведення єдиності на $[a;b]$ розв'язку x^* проводиться методом від супротивного. ■

Зауважимо, що у випадку коли в умові 1 $A_1(t,y,z) \equiv \Theta$ та $B_2(t,y,z) \equiv \Theta$, прийнявши за $B_1(t,y,z)$ та $A_2(t,y,z)$ в умові 5 константи Ліпшиця функції $F(t,y,z)$ за змінними y та z, відповідно, отримаємо результати, аналогічні до результатів із [5]. Методика побудови функції $F(t,y,z)$ для правої частини рівняння (1) в цьому частковому випадку досліджена в [9].

III. Приклади застосування

Приклад 1. Розглядатимемо рівняння (1) у вигляді

$$x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t),$$

де $t \in [0;T]$, $x \in [0;x_0]$ ($x_0 > 0$). Запишемо праву частину рівняння у вигляді $F(t,y,z) = a^+(t)z^2 - a^-(t)y^2 + b^+(t)z - b^-(t)y + c(t)$, де $a^+ = \frac{|a|+a}{2}$, $a^- = \frac{|a|-a}{2}$, $b^+ = \frac{|b|+b}{2}$, $b^- = \frac{|b|-b}{2}$. Тоді в (3) можна прийняти $A_1(t,y,z) = 2a^-(t)z + b^-(t)$, $B_2(t,y,z) = 2a^+(t)z + b^+(t)$, а у (10), $A_2(t,y,z) \equiv 0$, $B_1(t,y,z) \equiv 0$. Умова збіжності алгоритму (4) у цьому випадку набуде вигляду

$$r = 2T\max_{t\in[0;T]}\left(2a^-(t) + b^-(t) + 2a^+(t) + b^+(t)\right) < 1.$$

Приклад 2. Для крайової задачі

$$x' = \frac{t}{2}e^{-t^2}x^2 + tx + \frac{t}{2}e^{t^2}, \qquad (13)$$

$$x(0) + e^{-\frac{1}{9}}x\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \qquad (14)$$

$r = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{9}} + \frac{2}{3}\right) < 1$. Для $y_0 = const = 0$, $z_0 = const = 1,25$ отримаємо .

$$y_1 = \frac{1}{4\left(1+e^{-\frac{1}{9}}\right)}\left\{-1,5625\left(1-e^{-t^2}\right) + \left(e^{t^2}-1\right) + \right.$$
$$\left. +e^{-\frac{1}{9}}\left(3,125\left(e^{-\frac{1}{9}} - e^{-t^2}\right) + \frac{2,5\,(9t^2-1)}{9} + e^{t^2}\right) + 7\right\}$$

$$z_1 = \frac{1}{4\left(1+e^{-\frac{1}{9}}\right)}\left\{3,125\left(1-e^{-t^2}\right) + 2,5t^2 + 2\left(e^{t^2} - \right.\right.$$
$$\left.\left. -1\right) + e^{-\frac{1}{9}}\left(3,125\left(e^{-\frac{1}{9}} - e^{-t^2}\right) + e^{t^2}\right) + 7\right\}.$$

Для отриманих наближень маємо:

$$\min_{t\in[0;\frac{1}{3}]}(z_1(t) - y_1(t)) \approx 0{,}032795 > 0,$$

$$\max_{t\in[0;\frac{1}{3}]}(z_1(t) - y_1(t)) \approx 0{,}117192$$

$$y_1(0) + e^{-\frac{1}{9}}y_1\left(\frac{1}{3}\right) \approx 1{,}074898,$$

$$z_1(0) + e^{-\frac{1}{9}}z_1\left(\frac{1}{3}\right) \approx 2{,}04667$$

Точний розв'язок задачі (13), (14) $x^* = e^{t^2}$, тому для отриманих наближень

$$\min_{t\in[0;\frac{1}{3}]}(z_1(t) - x^*(t)) \approx 0{,}002825 > 0,$$

$$\max_{t\in[0;\frac{1}{3}]}(z_1(t) - x^*(t)) \approx 0{,}048997,$$

$$\min_{t\in[0;\frac{1}{3}]}(x^*(t) - y_1(t)) \approx 0{,}02997 > 0,$$

$$\max_{t\in[0;\frac{1}{3}]}(x^*(t) - y_1(t)) \approx 0{,}068195.$$

Висновки

Запропонований підхід до побудови двосторонніх наближень можна використати для апроксимації розв'язків інших крайових задач, зокрема, періодичної, а також багатоточкових крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь з параметрами. Досліджений алгоритм придатний для практичної реалізації за допомогою сучасних обчислювальних засобів. З огляду на те, що проведене дослідження має в основному теоретичне значення, то однією з перспектив подальших розвідок у цьому напрямку можна вважати конкретизацію запропонованого алгоритму з метою його реалізації за допомогою ЕОМ.

Література

[1] Курпель Н.С., Шувар Б.А. Двусторонние операторные неравенства и их применения. – К.: Наук. думка. 1980. – 268 с.

[2] Шувар Б.А. Двусторонние итерационные методы решения нелинейных уравнений в полуупорядоченных пространствах // Второй симпозиум по методам решения нелинейных уравнений и задач оптимизации, Т. 1. – Талин: Ин-т кибернетики АН ЭССР. 1981. – с. 68–73.

[3] Шувар Б.А. Квазічаплигінські алгоритми та аналоги монотонного методу Ньютона // Вісник ДУ "Львівська політехніка". Прикладна математика. – 1998. – № 337. – с. 410–413.

[4] Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – К.: Наук. думка, 1992. – 277 с.

[5] Нестеренко Л. И. Об одном двустороннем методе решения двухточечной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН УССР. – 1980. – № 11. – с. 18–21.

[6] Ментинський С.М. Двостороння апроксимація розв'язків крайової задачі для звичайного диференціального рівняння першого порядку. // Вісник НУ "Львівська політехніка". Прикладна математика. – 2000. – № 407. – с. 226–230.

[7] Плехотин А. П. Теорема о существовании и единственности решения краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. – 1958. – 123. № 4. – с. 613–615.

[8] Покорный Ю.В. О В-положиетльных и В-монотонных операторах // Проблемы математического анализа сложных систем. – Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та. – 1967. – Вып. 1. – с. 58–63.

[9] Фолькман П. Заметка об интегральных неравенствах типа Вольтерра // Укр. мат. журн. 1984. 35, №3.– С. 393–395.

ABOUT TWO-SIDED APPROXIMATION THE SOLUTIONS OF A LINEAR BOUNDARY PROBLEM FOR THE SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

B. Shuvar, S. Mentynskyy

Lviv Polytechnic National University
12, S. Bandery Str., Lviv, 79013, Ukraine

The new two-sided analogue of a numerical - analytical method secuential approximations by A.M.Samojlenko for search the solutions of a linear boundary problem for the systems of ordinary differential equations is constructed and investigated. A design of consecutive approach and conditions of their convergence to the solution of a problem are based on property of B-monotony (for J.V.Pokorny) the right parts of the respective equations.

Keywords: two-sided methods, boundary problems, ordinary differential equations

2000 MSC: 60J10?

UDK: 517.927