ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 540, 2005, с. 69–72

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 540, 2005, p. 69–72

МЕТОДИ ПОСЛІДОВНОГО ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ ЧИСЛОВОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Р. Слоньовський , І. Тесак

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 11 листопада 2004 р.)

Наведено методику побудови послідовних наближень розв'язування задачі Коші для системи диференціальних рівнянь другого порядку та доведено теорему про оцінку їхньої точності.

Ключові слова: системи диференціальних рівнянь, дробово-раціональні чисельні методи, тейлорівські наближення, сітковий вузол, коефіцієнти апроксимації

2000 MSC: 65L10, 65L12, 65L20, 65L50, 65L70, 34B15

УДК: 519.62

Вступ

Математичні моделі багатьох, особливо коливних, процесів описуються системами диференціальних рівнянь другого порядку. Дослідження таких моделей здебільшого проводять шляхом зведення системи другого порядку до розширеної системи рівнянь першого порядку. Така методика для жорстких систем стає незручною, у зв'язку з використанням неявних методів і необхідністю розв'язування на кожному кроці нелінійних систем алгебраїчних рівнянь подвоєної розмірності. Сучасні числові методи безпосереднього розв'язання систем другого порядку, такі як методи Нюстрема, Штермера [1], мають невисокий порядок точності і призначені для розв'язання нежорстких систем. Тому побудова нових числових методів для таких задач є актуальною.

I. Лінійні методи послідовного підвищення точності наближеного розв'язку

Розглянуто проблему побудови нових ефективних числових методів безпосереднього, без додаткових перетворень, розв'язування систем диференціальних рівнянь другого порядку на базі формул дробово-раціональних наближень [2].

Розглянемо задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$y'' = f\left(x, y, y'\right), \quad y\left(x_0\right) = y_0, \quad y'\left(x_0\right) = y_0', \tag{1}$$

$$y \in \mathbb{R}^S, \quad f : \mathbb{R}^{2S+1} \to \mathbb{R}^S,$$

для якої на проміжку $x \in [x_0, x_k]$ існує єдиний розв'язок.

Побудуємо числовий метод послідовного підвищення точності розв'язання задачі в сіткових вузлах $x_1, x_2, \ldots, x_k$, починаючи від вузла x_1 і використовуючи початкові умови в точці x_0.

Припустимо, що, використовуючи метод, ми визначили значення наближень розв'язку і його похідної в сітковому вузлі x_n, які позначимо y_n та y_n'. Розглянемо побудову їх послідовних наближень y_{n+1} та y_{n+1}' у вузлі $x_{n+1} = x_n + h$.

У першому наближенні приймемо, що друга похідна розв'язку на інтервалі $[x_n, x_{n+1}]$ є сталою величиною

$$y''\left(x\right) = C_0, \tag{2}$$

де C_0 визначимо з рівняння (1),

$$y''\left(x_n\right) = C_0 = f\left(x_n, y_n, y_n'\right). \tag{3}$$

Проінтегруємо функцію (2) на відрізку $[x_n,\ x]$. У результаті одержимо

$$y'\left(x\right) = y_n' + C_0\left(x - x_n\right). \tag{4}$$

Інтегрування функції (4) на вказаному інтервалі визначає функцію

$$y\left(x\right) = y_n + y_n'\left(x - x_n\right) + C_0\frac{\left(x - x_n\right)^2}{2}. \tag{5}$$

Використовуючи функції (5) і (4), визначимо перші наближення розв'язку задачі (1) та його похідної у вузлі $x_{n+1} = x_n + h$, які відповідно позначимо

$$y_{n+1}^{[1]} = y_n + hy_n' + \frac{h^2}{2}C_0 \quad \text{і} \quad {y'}_{n+1}^{[1]} = y_n' + hC_0. \tag{6}$$

Для визначення другого наближення розв'язку задачі використаємо одержані наближення (6) й обчислимо з рівняння (1) наближення другої похідної у вузлі x_{n+1}:

$$y_{n+1}'' = f\left(x_{n+1},\ y_{n+1}^{[1]},\ {y'}_{n+1}^{[1]}\right). \tag{7}$$

Подамо тепер зображення функції другої похідної розв'язку на тому ж інтервалі $[x_n, x_{n+1}]$ поліномом

$$y''\left(x\right) = C_0 + C_1\left(x - x_n\right), \quad x \in [x_n, x_{n+1}]. \tag{8}$$

Очевидно, що C_0 знову визначається співвідношенням (3). Для визначення коефіцієнта C_1 підставимо в (8) значення $x = x_{n+1}$ і використаємо (3) і (7):

$$C_1 h = f\left(x_{n+1},\ y^{[1]}_{n+1},\ {y'}^{[1]}_{n+1}\right) - f\left(x_n,\ y_n,\ y'_n\right). \quad (9)$$

Після інтегрування функції (8) двічі на відрізку $[x_n,\ x]$, одержимо

$$y'(x) = y'_n + C_0(x - x_n) + C_1\frac{(x-x_n)^2}{2}, \quad (10)$$

$$y(x) = y_n + y'_n(x-x_n) + C_0\frac{(x-x_n)^2}{2} + C_1\frac{(x-x_n)^3}{6}. \quad (11)$$

Використовуючи (10) та (11), знайдемо друге наближення розв'язку задачі (1) та його похідної у вузлі x_{n+1}:

$$y^{[2]}_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2}C_0 + \frac{h^3}{6}C_1, \quad (12)$$

$${y'}^{[2]}_{n+1} = y'_n + hC_0 + \frac{h^2}{2}C_1. \quad (13)$$

Аналогічно можна послідовно обчислювати наступні наближення розв'язку.

Розглянемо спосіб знаходження $(p+1)$-го наближення розв'язку задачі (1) та його похідної на інтервалі $[x_n, x_{n+1}]$, приймаючи вже відомими їх p–ті функціональні наближення $y^{[p]}(x)$ та ${y'}^{[p]}(x)$. Для цього будемо апроксимувати другу похідну розв'язку поліномом p–го степеня

$$y''(x) = \sum_{i=0}^{p} C_i(x-x_n)^i. \quad (14)$$

Для знаходження коефіцієнтів апроксимації C_k, виберемо на вказаному інтервалі $(x_n,\ x_{n+1})$ набір $p-1$ різних проміжкових вузлів

$$x_{n+\alpha_1} = x_n + \alpha_1 h, \quad x_{n+\alpha_2} = x_n + \alpha_2 h, \ldots,$$
$$x_{n+\alpha_{p-1}} = x_n + \alpha_{p-1} h, \quad (0 < \alpha_k < 1), \quad (15)$$

і визначимо в цих точках значення p–их наближень розв'язку та його похідної:

$$y^{[p]}(x_n + \alpha_i h) = y^{[p]}_{n+\alpha_i},$$
$${y'}^{[p]}(x_n+\alpha_i h) = {y'}^{[p]}_{n+\alpha_i},\ \left(i = \overline{1,p}\right),\ \alpha_p = 1. \quad (16)$$

Використовуючи рівняння (1) і співвідношення вигляду (16), знайдемо наближені значення другої похідної

$$y''(x_n + \alpha_i h) = f\left(x_n + \alpha_i h,\ y^{[p]}_{n+\alpha_i},\ {y'}^{[p]}_{n+\alpha_i}\right), \quad \left(i = \overline{1,p}\right). \quad (17)$$

Тоді для визначення коефіцієнтів C_i складемо систему p лінійних алгебраїчних рівнянь

$$f\left(x_n+\alpha_i h,\ y^{[p]}_{n+\alpha_i},\ {y'}^{[p]}_{n+\alpha_i}\right) - f\left(x_n,\ y_n,\ y'_n\right) = \sum_{j=1}^{p}\alpha_i^j h^j C_j, \quad \left(i=\overline{1,p}\right). \quad (18)$$

Система (18) за умови, що $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$, має єдиний розв'язок, оскільки детермінант головної матриці системи є детермінантом Вандермонда. Визначивши коефіцієнти C_i і проінтегрувавши функцію (14) двічі, одержимо

$$y'(x) = y'_n + \sum_{i=0}^{p} C_i\frac{(x-x_n)^{i+1}}{i+1}, \quad (19)$$

$$y(x) = y_n + y'_n(x-x_n) + \sum_{i=0}^{p} C_i\frac{(x-x_n)^{i+2}}{(i+1)(i+2)}. \quad (20)$$

Зі співвідношень (20) і (19) знаходимо нові $p+1$-наближення розв'язку та похідної у сітковому вузлі x_{n+1}:

$$y^{[p+1]}_{n+1} = y_n + hy'_n + \sum_{i=0}^{p} C_i\frac{h^{i+2}}{(i+1)(i+2)}, \quad (21)$$

$${y'}^{[p+1]}_{n+1} = y'_n + hC_0 + \frac{h^2}{2}C_1 + \cdots + \frac{h^{p+1}}{p+1}C_p. \quad (22)$$

Цей процес можна здійснювати для довільних значень величини p.

II. Оцінка узгодженості методів з тейлорівськими наближеннями

Постає запитання, що дають ці послідовні наближення, чи вони збігаються до розв'язку вихідної задачі в даному черговому вузлі?

Твердження 1. Якщо знаходження послідовних наближень у даному вузлі продовжувати, починаючи від першого наближення, то p–те наближення розв'язку узгоджується з тейлорівським наближенням $p+1$–го порядку $T_{n,p+1}$.

□ *Доведення.* Враховуючи значення коефіцієнта C_0, згідно з (3) перші наближення розв'язку та його похідної в сітковому вузлі $x_{n+1} = x_n + h$ на основі (6) приймають вигляд $x_{n+1} = x_n + h$

$$y^{[1]}_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2}y''_n, \quad {y'}^{[1]}_{n+1} = {y'}_n + hy''_n, \quad (23)$$

що відповідає для розв'язку тейлорівському наближенню другого порядку у вузлі x_{n+1}, а для похідної — тейлорівському наближенню першого порядку відносно сіткового вузла x_n. Підставивши ці значення в (7), після відповідних перетворень одержимо тейлорівське наближення першого порядку другої похідної розв'язку в сітковому вузлі x_{n+1} відносно вузла x_n:

$$f\left(x_{n+1},\ y^{[1]}_{n+1},\ {y'}^{[1]}_{n+1}\right) = y''_n + hy'''_n + O\left(h^2\right). \quad (24)$$

Використовуючи (3) і (24) з (9), визначимо коефіцієнт C_1

$$C_1 = y'''_n + O(h). \quad (25)$$

Звідси другі наближення розв'язку $y_{n+1}^{[2]}$ і похідної $y'^{[2]}_{n+1}$ у вузлі x_{n+1}, на основі (12), (13), набудуть вигляду

$$y_{n+1}^{[2]} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2}y''_n + \frac{h^3}{6}y'''_n;$$
$$y'^{[2]}_{n+1} = y'_n + hy''_n + \frac{h^2}{2}y'''_n. \tag{26}$$

Виберемо тепер на інтервалі (x_n, x_{n+1}) деякий проміжний вузол

$$x_{n+\alpha} = x_n + \alpha h, \text{ де } 0 < \alpha < 1. \tag{27}$$

На основі співвідношень (10), (11) визначимо другі наближення розв'язку та похідної у вузлі (27)

$$y_{n+\alpha}^{[2]} = y_n + \alpha hy'_n + \frac{1}{2}\alpha^2h^2y''_n + \frac{1}{6}\alpha^3h^3y'''_n,$$
$$y'^{[2]}_{n+\alpha} = y'_n + \alpha hy''_n + \frac{1}{2}\alpha^2h^2y'''_n. \tag{28}$$

Підставивши (28) у праву частину рівняння (1), одержимо

$$f\left(x_n + \alpha h,\ y_{n+\alpha}^{[2]},\ y'^{[2]}_{n+\alpha}\right) = y''_n + \alpha hy'''_n +$$
$$+\frac{\alpha^2h^2}{2}y_n^{(4)} + O\left(h^3\right). \tag{29}$$

Нехай твердження виконується до p–го наближення. Тоді за аналогією з (29) співвідношення (17) набуде вигляду

$$f\left(x_n + \alpha_i h,\ y_{n+\alpha_i}^{[p]},\ y'^{[p]}_{n+\alpha_i}\right) = y''_n + \sum_{k=1}^{p}\frac{\alpha_i^kh^k}{2}y_n^{(k+2)}, \tag{30}$$

а система (18) перетвориться до вигляду

$$\sum_{k=1}^{p}\alpha_i^kh^k\left(\frac{1}{k!}y_n^{(k+2)} - C_k\right) = 0. \tag{31}$$

Очевидно, що система (31) має єдиний розв'язок

$$C_k = \frac{1}{k!}y_n^{(k+2)}, \quad \left(k = \overline{1,p}\right). \tag{32}$$

Звідси $\boldsymbol{p+1}$–ше наближення розв'язку на основі (21) апроксимується тейлорівським наближенням $p+2$ порядку

$$y_{n+1}^{[p+1]} = \sum_{k=0}^{p+2}\frac{h^k}{k!}y_n^{(k)}. \tag{33}$$

Що й доводить твердження. ■

III. Застосування методів для дослідження жорстких систем

Необхідно зауважити, що вказані наближення визначають послідовність лінійних явних однокрокових числових методів і їх області стійкості збігаються з областями стійкості явних методів типу Рунге–Кутта відповідного порядку. У зв'язку з цим одержані методи можна безпосередньо використовувати для розв'язання жорстких систем диференціальних рівнянь тільки з відповідним, достатньо малим кроком інтегрування. Тому для підвищення ефективності дослідження жорстких систем побудовану послідовність методів доцільно використовувати при утворенні дробово-раціональних числових методів.

Для побудови дробово-раціональних числових методів використаємо методику, описану в роботі [2]. Необхідні для реалізації значення векторів F_{ky}, $F_{ky'}$ визначаються з (21) і (22)

$$F_{ky} = y_{n+1}^{[k]} - y_n,\ F_{ky'} = y'^{[k]}_{n+1} - y'_n,$$
$$\text{для } k = \overline{1,p}. \tag{34}$$

Потрібні, крім цього, матриці частинних похідних $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x=x_n}$ та $\left.\frac{\partial f}{\partial y'}\right|_{x=x_n}$, обчислюють, враховуючи рівняння (1), шляхом безпосереднього диференціювання і подання їх в аналітичному вигляді або, у разі складності самої правої частини рівняння (1), числовим диференціюванням.

Для проведення обчислювального експерименту була складена програма SOM2P. Результати експерименту на різних тестових задачах жорстких і нежорстких систем рівнянь підтвердили збереження потрібної точності результатів на всьому інтервалі інтегрування та зменшення обчислювальних затрат порівняно з іншими сучасними методами.

Необхідно зауважити, що розроблені методи з побудовою відповідної методики можна використовувати і для дослідження систем неявних диференціальних рівнянь першого порядку вигляду

$$F\left(x,\, y,\, y'\right) = 0,$$

які за відповідних умов зводяться до явних систем диференціальних рівнянь другого порядку.

Література

[1] Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. - М.: Мир, 1990. -512 с.

[2] Чисельні методи розв'язку жорстких систем диференціальних рівнянь // Методичні вказівки до курсу "Математичне моделювання" для аспірантів технічних спеціальностей/ Укл.: Р.В. Слоньовський, Т.М. Яремко. - Львів: ЛПІ, 1990. -35 с.

METHODS OF CONSEQUENT INCREASING OF ACCURACY OF NUMERICAL SOLUTION OF SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

R. Slonevski, I. Tesak

Lviv Polytechnic National University
12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine

The construction methodology of approaches of solution Koshy's problem for system of two order differential equations are described in this paper. Also we proved the theorem about estimates of methods accuracy.

Keywords: systems of differential equations, fractional-rational numerical methods, approximation of Taylor, grid node, approximation coefficients

2000 MSC: 65L10, 65L12, 65L20, 65L50, 65L70, 34B15

UDK: 519.62