ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 540, 2005, с. 65–68

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 540, 2005, p. 65–68

МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧАМИ ОПТИМІЗАЦІЇ З ДРОБОВО-ЛІНІЙНОЮ ЦІЛЬОВОЮ ФУНКЦІЄЮ НА ПОЛІПЕРЕСТАВЛЕННЯХ

О. Ємець, Н. Романова

Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка, м. Полтава

(Отримано 20 березня 2004 р.)

Побудовано математичну модель оптимізаційної задачі з дробово-лінійною цільовою функцією. Обгрунтовано використання множини поліпереставлень як апарат математичного моделювання задачами оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями.

Ключові слова: математична модель, поліпереставлення, дробово-лінійна цільова функція.

2000 MSC: 90C30

УДК: 519.85

I. Постановка задачі в загальному вигляді

Розвиток апарату математичного моделювання в напрямку застосування оптимізаційних задач на комбінаторних множинах зумовлює як актуальне завдання систематичне вивчення таких задач.

II. Аналіз останніх досліджень і публікацій

Останніми роками активно досліджуються задачі оптимізації на множинах поліпереставлень [1–10], а також задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійною цільовою функцією [11–14]. Але задач комбінаторної оптимізації на поліпереставленнях з дробово-лінійною цільовою функцією в публікаціях автори не зустрічали.

III. Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми

Перше питання, яке виникає під час аналізу подальших досліджень в зазначеному напрямку, чи є необхідність розглядати задачі з дробово-лінійною цільовою функцією на множинах поліпереставлень.

IV. Постановка задачі

У роботі метою є показати необхідність дослідження задач оптимізації на поліпереставленні з дробово-лінійними цільовими функціями побудовою математичної моделі однієї практичної задачі в означеному вигляді.

V. Викладення основних матеріалів досліджень

Наведемо деякі відомості та необхідні далі означення і факти.

Нехай $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ мультимножина n дійсних чисел, k з яких різні.

Дамо означення загальної поліпереставної множини ([1, 2]). Позначимо J_n множину n перших натуральних чисел, тобто $J_n = \{1, ..., n\}$, нехай $J_n^0 = J_n \cup \{0\}$, $J_0 = \emptyset$. Розглянемо упорядковане розбиття множини J_n на s множин $K_1, \dots, K_s$, які задовольняють умови: $K_i \bigcap K_j = \emptyset$, $K_i \neq \emptyset$, $\forall$ i, j $\in$ J_s. Позначимо $G^{K_i} \subset G-$ мультимножину з кількістю елементів k_i, де $k_i = |K_i|$, $\forall i \in J_s$, яку утворено елементами з G: $g_1^{K_1}, ..., g_{k_i}^{K_i}$ з номерами з множини K_i. Очевидно, $k_1 + ... + k_s = n$. Множину елементів вигляду π :

$$\pi = (\pi(1), ..., \pi(n)) = (\pi^1, ..., \pi^s),$$

де π^i – довільне переставлення з елементів множини K_i, $\forall i \in J_s$. Позначимо через $H = \{\pi\}$. Множину

$$P_{nk}^s(G, H) = \{(g_{\pi(1)}, ..., g_{\pi(n)}) | \forall \pi \in H\}$$

назвемо загальною поліпереставною множиною. Зануренням множини $P_{nk}^s(G, H)$ в евклідів простір R^n будемо називати відображення, яке поліпереставленню $(g_{i_1}, ..., g_{i_n}) \in P_{nk}^s(G, H)$ ставить у відповідність точку $x = (x_1, ..., x_n)$ в арифметичному просторі R^n за правилом $x_j = g_{i_j}, \forall$j $\in$ J_n. Образ множини $P_{nk}^s(G, H)$ при зануренні позначимо $E_{nk}^s(G, H)$.

Розглянемо таку задачу про визначення порядку обслуговування замовлень для максимізації рентабельності системи обслуговування.

Є система обслуговування, що містить q рівноправних обслуговуючих приладів. На обслуговування надходить замовлення, що складається з елементів різних типів. Кількість типів позначимо s. Кількість елементів замовлення типу $\lambda \in J_s$ позначимо p_λ, а $p_1 + ... + p_s = p$. Елементи замовлення пронумеровані в межах типу. Елемент замовлення типу λ з номером j, $j \in J_{p_\lambda}$ обслуговується якимось одним приладом обслуговуючої системи за час a_j^λ. Витрати системи на використання приладу i, $i \in J_q$, на обслуговування елемента замовлення типу λ складають $d(i, \lambda)$ на одиницю часу, а витрати, що не залежать від елемента, а залежать тільки від його типу -$d(0, \lambda)$, витрати, що не залежать від складу замовлення, – $d(0,0)$. Прилади обслуговування можуть мати часові періоди, в які вони не можуть обслуговувати елементи замовлення, – періоди заборони. Позначимо m_i кількість таких періодів для приладу з номером i, а c_{ij}, $\mathrm{d_{ij}}$ – час початку і кінця такого періоду заборони Z_{ij} з номером $j \in J_{m_i}$ $\forall \mathrm{i} \in \mathrm{J}_q$.

Продуктивність використання приладу i, $\mathrm{i} \in \mathrm{J}_q$ при обслуговувані елемента типу λ, $\lambda \in \mathrm{J}_s$, становить $c(i, \lambda)$.

Необхідно виконати замовлення до моменту часу, що не перевищує $Q_{i\,\max}$ (ця величина може бути необмеженою) та не менше ніж $Q_{i\,\min}$ (ця величина може бути і нулем). Вважається, що $Q_{i\,\min} > d_{im_i}$. Задача полягає в визначенні такого порядку обслуговування приладами замовлення, при якому рентабельність системи обслуговування була б максимальною.

Побудуємо математичну модель цієї задачі. Не порушуючи загальності міркувань, пронумеруємо a_j^λ так, що $\forall \lambda \in \mathrm{J}_s$ $a_1^\lambda \leq a_2^\lambda \leq ... \leq a_{p_\lambda}^\lambda$.

Для того, щоб вигляд деяких подальших формул був однаковим, вважатимемо, що $\forall i \in \mathrm{J}_q$ $c_{i1} = 0$; $\mathrm{c_{i,(m_i + 1)}} = Q_{i\,\max}$.

Позначимо $K_{ij\lambda}$ максимальну кількість елементів типу λ, що можуть бути обслуговані після періоду заборони Z_{ij} (до наступного, якщо він є, або відповідно – після останнього) приладом з номером i, $\lambda \in \mathrm{J}_s$, $\mathrm{j} \in \mathrm{Jm}_i$, $\mathrm{i} \in \mathrm{J}_q$.

Очевидно, що величини $K_{ij\lambda}$ $\forall \lambda \in \mathrm{J}_s$, $\forall \mathrm{j} \in \mathrm{J}_{xm_i}$, $\forall \mathrm{i} \in \mathrm{J}_q$ можна знайти, розв'язавши таку систему нерівностей;

$$\begin{aligned} &\sum_{t=1}^{K_{ij\lambda}} a_t^\lambda \leq c_{i,(j+1)} - d_{ij}; \\ &\sum_{t=1}^{K_{ij\lambda}+1} a_t^\lambda > c_{i,(j+1)} - d_{ij}. \end{aligned} \tag{1}$$

В умові задачі можна задавати додаткові обмеження на $K_{ij\lambda}$ як у вигляді меж

$$\begin{gathered} K_{ij\lambda}^H \leq K_{ij\lambda} \leq K_{ij\lambda}^B, \\ \mathrm{j} \in J \subset \mathrm{J}_{m_i},\ \lambda \in \Lambda \subset \mathrm{J}_s,\ \mathrm{i} \in \mathrm{I} \subset \mathrm{J}_q, \end{gathered} \tag{2}$$

так і у вигляді складніших залежностей

$$\begin{gathered} W(K_{ij\lambda}) = 0, \quad \mathrm{j} \in J \subset \mathrm{J}_{m_i}, \\ \lambda \in \Lambda \subset \mathrm{J}_s,\ \mathrm{i} \in \mathrm{I} \subset \mathrm{J}_q, \end{gathered} \tag{3}$$

де W – задана функція, I, J, Λ – задані множини індексів.

Для величин $K_{ij\lambda}$, що визначаються з (1) та задовольняють умови (2), (3) (якщо вони є) позначимо

$$\sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{m_i} K_{ij\lambda} = n_\lambda \ \forall \lambda \in \mathrm{J}_s$$

та

$$\sum_{\lambda=1}^{s} n_\lambda = \chi.$$

Тут n_λ– гіпотетична кількість можливих до обслуговування елементів типу λ, $\lambda \in \mathrm{J}_s$, χ – гіпотетична загальна кількість елементів для обслуговування. Ці кількості підраховані, враховуючи часові ресурси приладів обслуговування (система нерівностей (1)).

Для тих $\lambda \in \mathrm{J}_s$, для яких $n_\lambda > p_\lambda$, введемо до розгляду $n_\lambda - p_\lambda$ фіктивних елементів типу λ, (тобто таких, що мають нульовий час обслуговування). Тоді після періоду заборони обслуговування Z_{ij} (до наступного, якщо він є, або відповідно – після останнього) приладом з номером i обслуговується рівно $K_{ij\lambda}$ елементів замовлення типу λ $\forall \lambda \in \mathrm{J}_s$, $\forall \mathrm{j} \in \mathrm{J}_{m_i}$, $\forall \mathrm{i} \in \mathrm{J}_q$.

Нехай $k_\lambda = \max\{n_\lambda, \mathrm{p}_\lambda\}$, а також $n = \sum\limits_{\lambda=1}^{s} k_\lambda$. Утворимо мультимножину G^{K_λ} часів обслуговування елементів типу λ, $G^{K_\lambda} = \{g_1^{K_1}, ..., g_{k_\lambda}^{K_\lambda}\}$. Вона складається з p_λ заданих (ненульових) елементів a_1^λ, ..., $a_{p_\lambda}^\lambda$ та, якщо $n_\lambda > p_\lambda$, з $n_\lambda - p_\lambda$ нульових елементів. Вважаємо всі елементи G^{K_λ} пронумерованими.

Введемо в розгляд суму всіх мультимножин G^{K_λ}, яку позначимо G: $G = \sum\limits_{\lambda=1}^{s} G^{K_\lambda}$.

Утворимо множини K_λ $\forall \lambda \in \mathrm{J}_s$ так:

$$K_\lambda = \left\{ \left(\sum_{\mu=1}^{\lambda-1} k_\mu \right) + 1,\ \left(\sum_{\mu=1}^{\lambda-1} k_\mu \right) + 2, ...,\ \sum_{\mu=1}^{\lambda} k_\mu \right\}.$$

Очевидно, що $K_\lambda \bigcap K_\mu = \emptyset$, $\mathrm{N}_\lambda \neq \emptyset$ $\forall \lambda, \mu \in \mathrm{J}_i$ та $\bigcup\limits_{\lambda=1}^{s} K_\lambda = J_n$.

Вважаємо елементи G пронумерованими номерами з J_n так, що елементи з G^{K_λ} пронумеровані числами з K_λ $\forall \lambda \in \mathrm{J}_s$. Утворимо множину H, що складається з усіх n- вибірок з множини J_n, де кожна з вибірок h має вигляд

$$h = (h(1), ..., h(n)) =$$

$$= \left(\tau(1,1,1,1), ..., \tau(i,j,\lambda,t), ..., \tau(q, m_q, s, K_{qm_qs})\right),$$

де $\tau(i,j,\lambda,t) \in J_n$ – номер елемента з G та i – номер приладу, що його обслуговує;

j – номер періоду заборони $Z_{ij,j} \in \mathrm{J}_{mi}$ для приладу номер i; λ – номер типу елемента, $\lambda \in J_s$; t – номер місця після періоду заборони Z_{ij} в порядку обслуговування приладом номер i елемента типу λ з мультимножини G^{K_λ}; t – номер місця між періодами заборони Z_{ij} та $Z_{i,(j+1)}$ приладу з номером i в порядку обслуговування елемента типу λ з мультимножини G^{K_λ}.

З іншого боку n-вибірку h можна розглянути як $h = (\pi^1, ..., \pi^\lambda, ..., \pi^s)$, де $\pi^\lambda = (\pi_{\lambda 1}, ..., \pi_{\lambda k_\lambda})$ – це k_λ-вибірка (переставлення) з K^λ, згадавши, що $|K^\lambda| = k_\lambda$, $\lambda \in \mathrm{J}_s$.

Утворимо з G за допомогою H згідно з означенням множину поліпереставлень $E^s_{nk}(G,H) = \{g_{h(1)}, ..., g_{h(n)} / \forall h \in H\}$.

Позначимо $x(i,j,\lambda,t)$ довільний елемент поліпереставлення x з $E^s_{nk}(G,H)$ – час (можливо нульовий) елемента типу λ, протягом якого обслуговується приладом номер i між періодами заборони Z_{ij} та $Z_{i,(j+1)}$, якщо цей елемент стоїть на місці t.

Позначимо

$$x = (x_1, ..., x_k) =$$
$$= \left(x(1,1,1,1), ..., x(i,j,\lambda,t), ..., x(q, m_q, s, K_{q\ m_q s})\right).$$

Рентабельність $F(x)$ для x визначається співвідношенням

$$F(x) = \frac{\sum\limits_{\lambda=1}^{s}\sum\limits_{i=1}^{q} c(i,\lambda) \sum\limits_{j=1}^{m_i}\sum\limits_{t=1}^{K(i,j,\lambda)} x(i,j,\lambda,t)}{\sum\limits_{\lambda=1}^{s}\sum\limits_{i=1}^{q} d(i,\lambda) \sum\limits_{j=1}^{m_i}\sum\limits_{t=1}^{K(i,j,\lambda)} x(i,j,\lambda,t) + \sum\limits_{\lambda=1}^{s} d(0,\lambda)} \tag{4}$$

Математична модель поставленої задачі набуває вигляду: знайти пару $< F^*(x),\ \mathrm{x}^* >$, де

$$F^* = \max_{x \in R^n} F(x), \tag{5}$$

$$x^* = \arg\max_{x \in R^n} F(x), \tag{6}$$

за комбінаторної умови

$$x \in E^s_{nk}(G,H) \tag{7}$$

та при некомбінаторних додаткових обмеженях

$$\sum_{\lambda=1}^{s} \sum_{t=1}^{K(i,j,\lambda)} x(i,j,\lambda,t) \le c_{i,(j+1)} - d_{ij} \quad \forall\, \mathrm{j} \in \mathrm{J}_{m_i}\ \forall\, \mathrm{i} \in \mathrm{J}_q \tag{8}$$

$$Q_{i\min} \le \sum_{\lambda=1}^{s} \sum_{t=1}^{K(i,m_i,\lambda)} x(i,m_i,\lambda,t) + d_{im_i} \le Q_{i\max} \tag{9}$$

Ця модель дає в частковому випадку, коли $s = 1$ та відсутні періоди заборони обслуговування, модель на переставленнях задачі, що розглянута в [15].

VI. Висновки

Отже, у статті показана можливість використовувати множину поліпереставлень як апарат математичного моделювання задачами оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями.

VII. Перспективи подальшого дослідження

З такої можливості випливає необхідність подальшого дослідження задач оптимізації з дробово-лінійною цільовою функцією, комбінаторним обмеженням у вигляді належності множині поліпереставлень та додатковими некомбінаторними обмеженнями.

Література

[1] Емец О.А. Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании: Учеб. пособие. – К.: УМК ВО, 1992. – 92 с.

[2] Стоян Ю.Г., Ємець О.А. Теорія и методи евклидової комбінаторної оптимізації. – К.: Ін-т системн. досліджень освіти, 1993. – 188 с.

[3] Емец О.А. Комбинаторная модель и приближенный метод с априорной оценкой решения оптимизационной задачи размещения разноцветных прямоугольников // Экономика и мат. методы. – 1993. – Т.29. – Вып. 2. – С. 294–304

[4] Емец О.А. Об оптимизации линейних и выпуклых функций на евклидовом комбинаторном множестве полиперестановок // Журнал вычислит. матем. и матем. физики – 1994. – Т.34. – №6. – С. 855–869.

[5] Стоян Ю.Г., Ємець О.О., Ємець Є.М. Множини полірозміщень в комбінаторній оптимізації // Доповіді НАНУ – 1999. – №8. – С. 37-41.

[6] Емец О.А., Евсеева Л.Г., Романова Н.Г. Задача цветной упаковки прямоугольников с учетом погрешностей исходных данных и ее решение // Экономика и матем. методы. – 2000. – Т. 36, №3. – С. 149–152.

[7] Ємець О.О., Ємець Є.М. Безумовна оптимізація на полірозміщеннях: достатні умови та оцінки мінімумів сильно опуклих цільових функцій // Вісник Запорізького державного університету. – Запоріжжя: ЗДУ. – 2000. – №1. – С. 44–48.

[8] Емец О.А., Евсеева Л.Г., Романова Н.Г. Интервальная математическая модель комбинаторной задачи цветной упаковки прямоугольников // Кибернетика и системный анализ. – 2001. – №3. – С. 131 – 138.

[9] Валуйская О.А., Емец О.А., Романова Н.Г. Выпуклое продолжение многочленов, заданных на полиперестановках, модифицированным методом Стояна-Яковлева // Журн. вычислит.математ и матем. физики. – 2002. – Т. 42, №4. – С. 591– 596.

[10] Ємець О.О., Романова Н.Г., Чілікіна Т.В. Задачі оптимізації на вершинно розташованих евклідових комбінаторних множинах // В кн.: Міждержавна науково-методична конференція "Проблеми математичного моделювання" (28–30 травня 2003 р., м. Дніпродзержинськ): Тези доп. – Дніпродзержинськ, 2003. – С. 32–33. q

[11] Ємець О.О., Колєчкіна Л.М. Розв'язування оптимізаційних задач дробово-лінійною цільовою функцією на загальній множині переставлень// Вісник держ. ун-ту "Львівська політехніка". – 1998. – №322, "Прикладна математика". – Т. 2. – С. 317–320.

[12] Ємець О.О., Колєчкіна Л.М. Задача оптимізації на переставленнях з дробово-лінійною цільовою функцією: властивості множини допустимих розв'язків // Український математичний журнал. – 2000. – Т. 52. – №12. – С. 1630 – 1640.

[13] Ємець О.О., Колєчкіна Л.М. Моделювання деяких прикладних задач оптимізаційними задачами з дробово-лінійною функцією цілі на переставленнях // Волинський математичний вісник. – Рівне: РДГУ. – 2000. – №7. – С. 70 –77.

[14] Емец О.А., Недобачий С.И., Колечкина Л.Н. Неприводимая система ограничений комбинаторного многогранника в дробно-линейной задаче оптимизации на перестановках // Дискретная математика. – 2001. – Т. 13. – Вып.1. – С. 110–118.

[15] Колєчкіна Л.М. Властивості задач комбінаторної оптимізації з дробово- лінійними цільовими функціями. Методи і алгоритми їх розв'язування: Дис. канд. фіз.- мат. наук: 01.05.02. – Полтава: ПолтНТУ. – 170с.

SIMULATION WITH THE HELP OF THE OPTIMIZATION PROBLEM ON THE POLYPERMUTATIONS WITH THE FRACTIONALLY LINEAR CRITERION FUNCTION

O. Yemets', N. Romanova

Pltava Consumer Cooperatives University
Kovalia Str., 3, Poltava, Ukraine, 36003

The mathematical model of the optimization problem with fractionally linear criterion function is designed. The possibility to use a great number of polypermutations as an apparatus of mathematical simulation with optimization problems the fractionally linear criterion function is explained.

Keywords: mathematical model, polypermutations, fractionally linear criterion function.

2000 MSC: 90C30

UDK: 519.85