ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 540, 2005, с. 62–64

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 540, 2005, p. 62–64

ПРО ЗБІЖНІСТЬ НАБЛИЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З МІРАМИ

О. Власій

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С.Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 11 жовтня 2004 р.)

Розглянуто можливість одержання наближених розв'язків диференціальних рівнянь з мірами шляхом апроксимації елементів матриці відповідної диференціальної системи першого порядку.

Ключові слова: диференційні рівняння з мірами, наближені розв'язки

2000 MSC: 34A37

УДК: 517.912

Вступ

При створенні досконаліших математичних моделей реальних фізичних процесів виникають диференціальні рівняння, коефіцієнти яких є узагальненими функціями. Практичний інтерес становить розробка наближених методів розв'язання таких узагальнених диференціальних рівнянь. У роботі встановлені умови, за яких наближений розв'язок узагальненого диференціального рівняння з мірами (тобто узагальненими функціями нульового порядку) можна одержати апроксимацією функцій, що породжують ці міри (або деяких із них).

I. Основні результати

Надалі будемо використовувати такі позначення:

I – відкритий інтервал дійсної осі;

$\mathrm{BV}^+_{loc}(I)$ – простір неперервних справа функцій локально обмеженої варіації на I;

$$\left|\overline{Y}\,(x)\right| = \sum_{i=1}^{k} |y_i(x)|$$

– норма вектора $\overline{Y}\,(x) = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_k(x))^{\mathrm{T}}$;

$$|C(x)| = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} |c_{ij}(x)|$$

– норма матриці $C(x) = (c_{ij}(x))_{i,j=1}^{k}$;

$$\Delta C(x_s) = C(x_s) - C(x_s - 0)$$

– стрибок матриці-функції $C(x)$ у точці x_s.

Важливе фізичне значення мають узагальнені диференціальні рівняння, які можна звести до диференціальної системи першого порядку

$$\overline{Y}\,'(x) = C'(x)\cdot \overline{Y}\,(x), \tag{1}$$

де $\overline{Y}\,(x)$ – k-вимірний вектор, $C'(x)$ – квадратна матриця k-го порядку така, що $C(x) \in \mathrm{BV}^+_{loc}(I)$. Для коректності системи (1) повинна виконуватися така умова [1]:

$$[\Delta C(x_s)]^2 \equiv 0 \qquad \forall\, x_s \in I.$$

Для системи (1) розглядається задача Коші із початковою умовою

$$\overline{Y}\,(x_0) = \overline{Y_0}\,. \tag{2}$$

Нехай $\{C_n(x)\}$ – послідовність матриць-функцій з простору $\mathrm{BV}^+_{loc}(I)$. Для них поставимо відповідні задачі Коші

$$\overline{Y_n}\,'(x) = C_n'(x)\cdot \overline{Y_n}\,(x), \tag{3}$$

$$\overline{Y_n}\,(x_0) = \overline{Y_0}\,. \tag{4}$$

Дослідимо, за яких умов розв'язок задачі (3), (4) прямує до розв'язку задачі (1), (2) при $n \to \infty$.

Справедливою є лема, яка є узагальненням першої теореми Хеллі [2].

Лема. *Нехай функції $\Phi_n(x)$ обмеженої варіації на відрізку $[a;b]$ збігаються у кожній точці цього відрізка до функції $\Phi(x)$, причому повні варіації цих функцій обмежені в сукупності*

$$\mathop{V}_{a}^{b}\Phi_n(x) \leqslant L, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Тоді для довільної функції $f(x)$ обмеженої варіації, неперервної справа, справедлива рівність

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,d\Phi_n(x) = \int_a^b f(x)\,d\Phi(x). \tag{5}$$

□ *Доведення.* Доведення леми проводиться за схемою доведення першої теореми Хеллі у роботі [2],

© О. Власій, 2005

де інтеграли Рімана-Стільтьєса у рівності (5) слід розуміти у змісті Аткінсона [1], тобто як границю

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{n-1}\{\Phi(\xi_{r+1})-\Phi(\xi_r)\}f(\xi_r)$$

якщо граничний перехід здійснюється за умови

$$\max_r(\xi_{r+1}-\xi_r)\to 0. \tag{6}$$

Тут $\{\xi_r\}$ – скінченне розбиття інтервалу $[a;b]$: $a=\xi_0<\xi_1<\ldots<\xi_n=b$. ■

Теорема. *Нехай для функцій* $C_n(x) = \left(c_{ij}^n(x)\right)_{i,j=1}^k$ *виконуються такі умови:*

1) для довільного фіксованого n виконується умова

$$[\Delta C(x_{s_n})]^2\equiv 0 \qquad \forall\, x_{s_n}\in I;$$

2) у кожній точці інтервалу I $C_n(x)$ збігаються до функції $C(x)$ (мається на увазі поелементна збіжність);

3) повні варіації функцій – елементів матриць $C_n(x)$ – рівномірно обмежені на будь-якому компакті $[a;b]\subset I$.

Тоді $\overline{Y_n}(x)$ на будь-якому компакті з I рівномірно прямує до $\overline{Y}(x)$ при $n\to\infty$, де $\overline{Y_n}(x)$ – розв'язок задачі (3), (4), а $\overline{Y}(x)$ – розв'язок задачі (1), (2).

□ *Доведення.* Виконання умови 1) необхідне для коректності диференціальних систем типу (3) (див. [1]).

Задача (1), (2) еквівалентна [1] інтегральному рівнянню

$$\overline{Y}(x)=\overline{Y}_0+\int_{x_0}^{x}dC(t)\cdot\overline{Y}(t). \tag{7}$$

Оскільки у нашому випадку $C(x)$ – матриця-функція обмеженої варіації, неперервна справа, то інтеграл у рівності (7) слід розуміти у змісті [1], тобто як границю

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{n-1}\{C(\xi_{r+1})-C(\xi_r)\}\overline{Y}(\xi_r)$$

якщо граничний перехід здійснюється за умови (6).

Задача (3), (4), аналогічно, еквівалентна інтегральному рівнянню

$$\overline{Y_n}(x)=\overline{Y}_0+\int_{x_0}^{x}dC_n(t)\cdot\overline{Y_n}(t).$$

Розглянемо різницю

$$\overline{Y}(x)-\overline{Y_n}(x)=\int_{x_0}^{x}dC(t)\cdot\overline{Y}(t)-\int_{x_0}^{x}dC_n(t)\cdot\overline{Y_n}(t)=\int_{x_0}^{x}d\left[C(t)-C_n(t)\right]\cdot\overline{Y}(t)+\int_{x_0}^{x}dC_n(t)\cdot\left[\overline{Y}(t)-\overline{Y_n}(t)\right].$$

Звідси одержимо

$$\begin{gathered}\left|\overline{Y}(x)-\overline{Y_n}(x)\right|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}d\left[C(t)-C_n(t)\right]\overline{Y}(t)\right|+\\+\left|\int_{x_0}^{x}dC_n(t)\cdot\left[\overline{Y}(t)-\overline{Y_n}(t)\right]\right|.\end{gathered} \tag{8}$$

На підставі поданої вище леми перший доданок у (8) можна зробити як завгодно малим, тобто для довільного як завгодно малого $\varepsilon>0$ справедлива нерівність

$$\left|\overline{Y}(x)-\overline{Y_n}(x)\right|\leqslant\varepsilon+\int_{x_0}^{x}|dC_n(t)|\cdot\left|\overline{Y}(t)-\overline{Y_n}(t)\right|.$$

Використовуючи узагальнення нерівності Гронуолла-Беллмана [3], одержимо

$$\left|\overline{Y}(x)-\overline{Y_n}(x)\right|\leqslant\varepsilon\cdot\exp\left\{\mathop{\mathrm{V}}_{x_0}^{x}C_n(t)\right\},$$

де $\mathop{\mathrm{V}}_{x_0}^{x}C_n(t)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\mathop{\mathrm{V}}_{x_0}^{x}c_{ij}^n(t)$.

Оскільки варіації функцій $c_{ij}^n(x)$ рівномірно обмежені на I, то з останньої нерівності внаслідок довільного вибору як завгодно малого $\varepsilon>0$ одержимо рівномірне прямування $\overline{Y_n}(x)$ до $\overline{Y}(x)$ на будь-якому компакті $[a;b]\subset I$. Теорема доведена. ■

Зауваження. Важливу роль під час розробки наближених методів розв'язання узагальнених диференціальних рівнянь з мірами відіграє апроксимація, запропонована у роботі [1]. При такій апроксимації елементи $c_{ij}(x)$ матриці $C(x)$ (або деякі з них) наближаються східчастими функціями $c_{ij}^n(x)$, які збігаються з відповідною функцією $c_{ij}(x)$ у точках, одержаних внаслідок поділу відрізка $[a;b]$ на n рівних частин, а між цими точками залишаються сталими. Тобто при $r=0,1,\ldots,n-1$ маємо:

$$c_{ij}^n(x)=c_{ij}\left(a+\frac{r(b-a)}{n}\right),$$

$$a+\frac{r(b-a)}{n}\leqslant x<a+\frac{(r+1)(b-a)}{n}.$$

Література

[1] Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи: Пер. с англ. – М.: Мир, 1968. – 749 с.

[2] Колмогоров А.М., Фомін С.В. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – К: Вища школа, 1974. – 455 с.

[3] Пахолок Б.Б. Об одном неравенстве типа Гронуолла-Беллмана // Вестн. Львов. политехн. ин-та: Дифференциальные уравнения и их приложения. – Львов: Высшая школа, 1989. № 232. – С. 109-110.

ABOUT THE OF APPROXIMATE SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH THE NORMS

O. Vlasiy

"Lviv polytechnic" National University
12 S.Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine

The theorem about approximation of solutions of differentional equations with zero-order generalized coefficients is proved.

Keywords: the differential equations with norms, approximation solutions

2000 MSC: 34A37

UDK: 517.912