ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 540, 2005, с. 51–54

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 540, 2005, p. 51–54

ПРОБЛЕМА МОМЕНТІВ ДЛЯ ПОДВІЙНИХ ЧИСЛОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

М. Чип

Національний університет "Львівська політехніка"
(79013, Львів, вул. С.Бандери 12)

(Отримано 30 листопада 2004 р.)

Розглянуті узагальнені моментні зображення подвійних послідовностей комплексних чисел. Наведено способи побудови розглядуваних зображень, доведено теорему існування і єдиності. Встановлено інтегральні зображення твірних функцій послідовностей моментів.

Ключові слова: проблема моментів, інтегральні зображення, твірна функції

2000 MSC: 30B40, 30E05, 30E20

УДК: 517.53

Вступ

Проблема зображення членів заданої числової послідовності та її твірних функцій в інтегральному вигляді виявилась ефективною і природною для здійснення аналітичного продовження функцій ([1]). З метою розширення класів твірних функцій розглядалися різні узагальнення класичної проблеми моментів.

Одним з узагальнень класичної проблеми моментів є проблема зображення членів заданої числової послідовності з фіксованою сумою цілих невід'ємних номерів у вигляді інтеграла від добутку двох функцій з кожної з відшукуваних функціональних послідовностей для кожного номера, зокрема, на відшукуваній множині та мірою на ній ([2]). Запропоноване узагальнення виявилось ефективним для одержання інтегрального зображення суми заданого степеневого ряду та побудови її раціональних наближень ([3]). Існують способи одержання деяких виглядів цих узагальнень ([4]).

У статті пропонується розглядати узагальнені моментні зображення подвійних числових послідовностей. На основі цих зображень пропонується систематизація по кожному індексу методу моментів побудови інтегральних зображень функцій, яка є новою та ілюструється прикладом.

I. Способи побудови моментних зображень та теорема існування і єдиності

Поняття узагальненого моментного зображення числової послідовності з фіксованою сумою цілих невід'ємних номерів її членів сформулюємо для подвійної числової послідовності.

Означення. *Узагальненим моментним зображенням заданої послідовності $\{s_{kl}\}_o^\infty \subset C$ назвемо зображення її членів у вигляді*

$$s_{kl} = \int\limits_\Gamma a_k(\zeta)\, b_l(\zeta)\, d\mu(\zeta) \tag{1}$$

на відшукуваній множині $\Gamma \subset C$з мірою $d\mu(\zeta)$ на ній та відшукуваними послідовностями $\{a_k(\zeta)\}_o^\infty$ і $\{b_l(\zeta)\}_o^\infty$ з простору $L_2(\Gamma; d\mu)$.

Зображення (1) можна одержати декількома способами.

Перший спосіб. Нехай $\{a_k(\zeta)\}_o^\infty$ – ортогональна система функцій на множині Γ з мірою $d\mu(\zeta)$, причому $\int\limits_\Gamma a_n^2(\zeta)\, d\mu(\zeta) = h_n$. Тоді

$$b_l(\zeta) = \sum_{\nu=0}^\infty \frac{s_{\nu l}}{h_\nu} a_\nu(\zeta), \tag{2}$$

якщо ряд збіжний при кожному $\zeta \in \Gamma$ і його можна почленно інтегрувати з множниками $a_k(\zeta)$ на множині Γ з мірою $d\mu(\zeta)$. Справді, інтегруючи, одержимо (1).

Другий спосіб. Нехай $\{c_\nu(\zeta)\}_o^\infty$ – ортогональна система функцій на множині Γ з мірою $d\mu(\zeta)$, причому $\int\limits_\Gamma c_\nu^2(\zeta)\, d\mu(\zeta) = \gamma_\nu$. Приймемо

$$a_k(\zeta) = \sum_{\nu=o}^k p_{\nu k} c_\nu(\zeta), \quad b_l(\zeta) = \sum_{\nu=0}^l q_{\nu l} c_\nu(\zeta); \tag{3}$$

$\{p_{\nu k}\} \subset C$, $\{q_{\nu l}\} \subset C$.

На основі зображення (1) одержуємо систему рівнянь

$$\sum_{\nu=o}^{\min(k,l)} p_{\nu k} q_{\nu l} \gamma_\nu = s_{kl} \tag{4}$$

для послідовного знаходження коефіцієнтів лінійних форм (3). Якщо задати одну з послідовностей $\{p_{kk}\}_o^\infty$ чи $\{q_{ll}\}_o^\infty$ старших коефіцієнтів, то всі інші коефіцієнти визначаються з (4) однозначно.

Третій спосіб. Нехай $\{p_\nu(\zeta)\}_0^\infty$ – ортогональна система алгебраїчних многочленів степеня ν на множині Γ з мірою $d\mu(\zeta)$. Приймемо: $\{a_k(\zeta)\}_o^\infty$ – довільна система алгебраїчних многочленів степеня k,

$$b_l(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{l} \lambda_{\nu l} p_\nu(\zeta) \quad . \tag{5}$$

На основі зображення (1), позначивши

$$\int_\Gamma p_\nu(\zeta) a_k(\zeta) d\mu(\zeta) = \omega_{\nu k},$$

одержуємо систему рівнянь

$$\sum_{\nu=0}^{l} \lambda_{\nu l} \omega_{\nu k} = s_{kl} \tag{6}$$

для знаходження коефіцієнтів лінійної форми (5). Оскільки $\omega_{\nu k} = 0$ при $\nu > k$. то (6) є системою лінійних рівнянь трикутного вигляду.

Теорема. *Для існування моментного зображення*

$$s_{kl} = \int_\Gamma a_k(\zeta) b_l(\zeta) d\mu(\zeta)$$

заданої послідовності $\{s_{kl}\}_0^\infty \subset C$ на відшукуваній множині $\Gamma \subset C$ з мірою $d\mu(\zeta)$ та відшукуваними функціями $a_k(\zeta)$ і $b_l(\zeta)$ вигляду

$$a_k(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{k} p_{\nu k} c_\nu(\zeta), \quad b_l(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{l} q_{\nu l} c_\nu(\zeta),$$

в якому числа $p_{\nu k}$ і $q_{\nu l}$ є комплексними, функції $c_\nu(\zeta)$ утворюють ортогональну систему на множині Γ з мірою $d\mu$, необхідно і достатньо, щоб матриця

$$H_n = \begin{pmatrix} s_{00} & s_{01} & \cdots & s_{0n} \\ s_{10} & s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ s_{n0} & s_{n1} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix} \tag{7}$$

була невиродженою для кожного $n = 0, 1, 2...$ Якщо задано одну з послідовностей $\{p_{kk}\}_0^\infty$ чи $\{q_{ll}\}_0^\infty$, то моментне зображення єдине.

□ *Доведення.* Вираження підінтегральних функцій моментного зображення у вигляді лінійних форм ортогональних функцій дозволяє застосувати засоби матричного числення

Необхідність. Нехай функції $a_k(\zeta)$ і $b_l(\zeta)$ мають вигляд (3). Розглянемо матриці

$$P_n = \begin{pmatrix} p_{00} & 0 & .. & 0 \\ p_{01} & p_{11} & \cdots & 0 \\ . & . & . & . \\ p_{0n} & p_{1n} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}, \quad Q_n = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} & \cdots & q_{0n} \\ 0 & q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$C_n = \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \cdots & 0 \\ . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_n \end{pmatrix} \tag{9}$$

Систему рівнянь (4) можна записати у вигляді матричного рівняння

$$P_n C_n Q_n = H_n, \tag{10}$$

з якого на основі властивості визначника добутку матриць, враховуючи значення визначника кожної матриці, для визначника $d(H_n)$ матриці H_n маємо

$$d(H_n) = \prod_{\nu=0}^{n} p_{\nu\nu} \gamma_\nu q_{\nu\nu}.$$

Оскільки лінійні форми (3) мають порядки відповідно k і l, то діагональні елементи матриць P_n і Q_n відмінні від нуля, тобто $p_{\nu\nu} \neq 0$ і $q_{\nu\nu} \neq 0$ при $\nu = 0, 1, 2..., n$; $\gamma_\nu \neq 0$. Тому $d(H_n) \neq 0$, тобто матриця H_n є невиродженою.

Достатність. Нехай матриця H_n є невиродженою. Розглянемо матриці P_n і Q_n з (8) та C_n з (9). На основі теореми про розкладання квадратної матриці на трикутні множники існує нижня трикутна матриця $P_n C_n$ і верхня трикутна матриця Q_n або нижня трикутна матриця P_n і верхня трикутна матриця $C_n Q_n$ такі, що є істинним співвідношенням (10), причому

$$p_{00} q_{00} \gamma_0 = s_{00} \neq 0,$$

$$p_{\nu\nu} q_{\nu\nu} \gamma_\nu = \frac{d(H_\nu)}{d(H_{\nu-1})} \neq 0, \quad \nu = 1, 2..., n.$$

Тоді $p_{\nu\nu} \neq 0$, $q_{\nu\nu} \neq 0$, $\gamma_\nu \neq 0$ при $\nu = 0, 1, 2, ..., n$; лінійні форми (3) мають порядки відповідно k і l та зображають відповідно функції $a_k(\zeta)$ і $b_l(\zeta)$.

Співвідношення (10) можна записати у вигляді системи рівнянь (4). Якщо задано одну з послідовностей $\{p_{kk}\}_0^\infty$ чи $\{q_{ll}\}_0^\infty$, то (4) є сумісною системою лінійних алгебраїчних рівнянь, функції $a_k(\zeta)$ і $b_l(\zeta)$ визначаються однозначно. Тоді для знайденої множини Γ і міри $d\mu$ моментне зображення (1) буде єдиним. ■

II. Побудова інтегральних зображень функцій

Нехай задано послідовність $\{s_{kl}\}_0^\infty$, члени якої зображено у вигляді (1) принаймні одним способом з заданою мірою $d\mu$ на заданій множині Γ, а також послідовності $\{p_k\}_0^\infty$ і $\{q_l\}_0^\infty$ комплексних чисел та послідовності $\{\varphi_k(z)\}_0^\infty$ і $\{\psi_l(w)\}_0^\infty$ функцій відповідної комплексної змінної. Приймемо

$$f_l(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s_{kl} \varphi_k(z), \qquad z \in \mathrm{D}_l(p; s; \varphi) \tag{11}$$

$$g_k(w) = \sum_{l=0}^{\infty} q_l s_{kl} \psi_l(w), \qquad w \in \mathrm{D}_k(q; s; \psi), \qquad (12)$$

$$A(z;\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k a_k(\zeta) \varphi_k(z),$$
$$z \in D(p; a; \varphi), \quad \zeta \in \Gamma \qquad (13)$$

$$B(w;\zeta) = \sum_{l=0}^{\infty} q_l b_l(\zeta) \psi_l(w),$$
$$w \in D(q; b; \psi), \quad \zeta \in \Gamma \qquad (14)$$

Підставимо (1) в (11) і (12). При умовах підсумовування ряду інтегралів та з врахуванням (13) і (14) одержуємо інтегральні зображення

$$f_l(z) = \int_{\Gamma} A(z;\zeta) b_l(\zeta) d\mu(\zeta), \; z \in \Delta_l(A; b) \qquad (15)$$

$$g_k(w) = \int_{\Gamma} B(w;\zeta) a_k(\zeta) d\mu(\zeta), \; w \in \Delta_k(B; a) \qquad (16)$$

Якщо області D_l і Δ_l чи D_k і Δ_k перетинаються, то інтегральні зображення (15) чи (16) продовжують зображені рядами в (11) чи (12) функції з областей D_l чи D_k на ті частини областей Δ_l чи Δ_k, які не містять точок областей D_l чи D_k відповідно.

Приймемо далі,

$$F(z;w) = \sum_{l=0}^{\infty} q_l f_l(z) \psi_l(w), \; (z;w) \in D(q; f; \psi) \quad (17)$$

$$G(z;w) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k g_k(w) \varphi_k(z), \; (z;w) \in D(p; g; \varphi). \quad (18)$$

Підставимо (15) в (17) та (16) в (18). При умовах підсумовування ряду інтегралів та з врахуванням (14) і (13) відповідно одержуємо інтегральні зображення

$$F(z;w) = \int_{\Gamma} A(z;\zeta) B(w;\zeta) d\mu(\zeta) = G(z;w),$$
$$(z;w) \in \Delta(A; B). \qquad (19)$$

Підставимо (11) в (17) та (12) в (18). При умовах перетворення повторних рядів до подвійного ряду маємо

$$F(z;w) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} p_k q_l s_{kl} \varphi_k(z) \psi_l(w) = G(z;w). \quad (20)$$

$$(z;w) \in D(p; q; s; \varphi; \psi).$$

Якщо відповідні області D і Δ перетинаються, то інтегральні зображення (19) продовжують зображені рядами в (17) і (18) та в (20) функції з областей D на ті частини областей Δ відповідно, які не містять точок областей D.

Запропоновану систематизацію методу моментів побудови інтегральних зображень функцій можна застосувати в теорії спеціальних функцій. Інтегральне зображення функції можна розглядати також як формулу для знаходження значення інтеграла, який цю функцію зображає.

Інтегральне зображення (19) суми ряду в (20) можна одержати безпосередньо. Для цього члени подвійної послідовності в (20) зображаємо у вигляді (1) і при умовах підсумовування подвійного ряду інтегралів та вираження подвійного ряду через повторні ряди враховуємо позначення (13) і (14). Потреба в появі рядів (17) та (18) обумовлена можливістю одержання співвідношення між спеціальними функціями на основі рівності сум цих рядів, а також можливістю зображення інтегралом суми ряду без попереднього її знаходження чи можливістю зображення рядом значення інтеграла без попереднього його знаходження.

Приклад. Нехай $s_{kl} = \dfrac{1}{(k+a)^{l+b}}$, де $k = 0, 1, 2, ...$, $l = 0, 1, 2, ...$, $\mathrm{Re}\, a > 0$, $\mathrm{Re}\, b > 0$. На основі означення гама-функції маємо

$$\frac{1}{(k+a)^{l+b}} = \frac{1}{\Gamma(l+b))} \int_0^{\infty} x^{l+b-1} e^{-(k+a)x} dx.$$

Тому члени заданої послідовності можна зобразити у вигляді (1), в якому

$$a_k(x) = \mathrm{e}^{-kx}, \quad b_l(x) = \frac{x^l}{\Gamma(l+b)},$$

$$d\mu(x) = x^{b-1} \mathrm{e}^{-ax} dx, \quad \Gamma = (0; \infty).$$

Нехай $p_k = 1$, $\varphi_k(z) = z^k$, $q_l = 1$, $\psi_l(w) = w^l$. Тоді

$$f_l(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+a)^{l+b}} = \Phi(z; a; l+b), \quad |z| < 1,$$

$$q_k(w) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{w^l}{(k+a)^{l+b}} = \frac{1}{(k+a)^{b-1}} \cdot \frac{1}{k+a-w},$$

$$|w| < |k+a;|$$

$$A(z;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-kx} z^k = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - z}, \quad |z| < 1,$$

$$B(w;x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l w^l}{\Gamma(l+b)} = \frac{{}_1F_1(1; b; wx)}{\Gamma(b)}, \quad w \in \mathrm{C}.$$

Одержуємо відоме інтегральне зображення

$$\Phi(z; a; l+b) = \frac{1}{\Gamma(l+b)} \int_0^{\infty} \frac{x^{l+b-1} \mathrm{e}^{-(a-1)x}}{\mathrm{e}^x - z} dx,$$

$$|\arg(1-z)| < \pi,$$

та відому формулу

$$\int_0^\infty x^{b-1} e_1^{-(k+a)x} F_1(1;b;wx)\,dx = \frac{\Gamma(b)}{(k+a)^{b-1}} \cdot \frac{1}{k+a-w}, \quad w \neq k+a.$$

Далі маємо

$$F(z;w) = \sum_{l=0}^{\infty} \Phi(z;a;l+b)\,w^l, \quad G(z;w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+a)^{b-1}(k+a-w)},$$

$$F(z;w) = \frac{1}{\Gamma(b)} \int_0^\infty \frac{{}_1F_1(1;b;wx)}{e^x - z} x^{b-1} e^{-(a-1)x} dx = G(z;w).$$

Для іншого набору послідовностей $\{p_k\}_0^\infty$ і $\{q_l\}_0^\infty$ коефіцієнтів та послідовностей $\{\varphi_k(z)\}_0^\infty$ і $\{\psi_l(w)\}_0^\infty$ базових функцій в побудові послідовностей $\{f_l(z)\}_0^\infty$ і $\{g_k(w)\}_0^\infty$ твірних функцій при тому ж моментному зображенні одержуємо інші інтегральні зображення.

Способи побудови узагальнених моментних зображень подвійних числових послідовностей і способи вибору коефіцієнтів та базових функцій для побудови твірних функцій відкривають привабливі перспективи одержання інтегральних зображень спеціальних функцій чи знаходження значень інтегралів від спеціальних функцій.

Література

[1] Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.: Наука, 1966. – 672 с.

[2] Дзядик В.К. Про узагальнення проблеми моментів // ДАН УРСР, серія А. – 1981. – № 6. – с. 8–12.

[3] Дзядык В.К. Обобщенная проблема моментов и аппроксимация Паде // Укр. Матем. журн. – 1983. – т. 35, № 3. – с. 297–302.

[4] Чип М.М. Способи побудови узагальнених моментних зображень многочленного виду. // Укр. Матем. журн. – 1992. – т. 44, № 7. – с. 995–997.

THE PROBLEM OF MOMENTS FOR DOUBLE NUMBER SEQUENCES

M. Chip

Nacional'nyj univepsytet "L'vivs'ka Politehnika"
(79013, L'viv, vul. S.Bandepy 12

Generalized moment representations of the double sequences of complex numbers are studied. The methods for constructing of the representations are given and the existence and uniqueness theorem is proved. Integral representations for the generating functions of the moment sequences are obtained.

Keywords: the problem of moments, integral represantations, generating functions

2000 MSC: 30B40, 30E05, 30E20

UDK: 517.53