ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 540, 2005, с. 44–50

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 540, 2005, p. 44–50

РОЗВИНЕННЯ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЗА СИСТЕМАМИ ПОЛІНОМІВ ТИПУ МЕЛЛІНА

М. Сухорольський

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 2 лютого 2005 р.)

Розглянуто системи поліномів, що є інтегральними перетвореннями Мелліна (зі степеневими ядрами) функцій, аналітичних у нескінченно віддаленій точці. Досліджено умови зображення поліномів і біортогональних з ними функцій у вигляді контурних інтегралів. Вивчаються також достатні умови розвинення аналітичних функцій у ряди за системами поліномів. Наведено приклади розвинення функцій в ряди та побудову розв'язків рівнянь з частинними похідними.

Ключові слова: біортогональні системи поліномів, інтеграл по контуру, системи поліномів.

2000 MSC: 41A10

УДК: 517.53.57

Вступ

Біортогональні системи функцій комплексної змінної та методи розвинення аналітичних функцій за біортогональними системами функцій вивчаються у роботах [2–5, 8]. У роботах [2, 3, 8, 9] розглянуто окремі класи систем поліномів (послідовність частинних сум степеневого ряду, системи інтерполяційних поліномів, системи многочленів Фабера, системи гармонічних многочленів та інші) і досліджено достатні умови розвинення аналітичних функцій за цими системами. У зопропонованій роботі досліджено системи поліномів, що є перетвореннями Мелліна аналітичних функцій.

I. Властивості систем поліномів і біортогональних з ними функцій

Розглянемо у комплексній площині систему поліномів [9]

$$\left\{P_n(z)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a_k b^{n-k} z^k\right\}_{n=0}^{\infty}. \tag{1}$$

Вважаємо, що коефіцієнти поліномів задовольняють умови:

$$b\neq 0,\quad a_k\neq 0\quad (k=0,1,...); \tag{2}$$

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{|a_k|}{k!}}=A\quad (0\leqslant A<\infty) \tag{3}$$

і, якщо $A=0$, то

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}=a\quad (0<a<\infty). \tag{4}$$

Наведемо основні властивості системи (1).

Властивість 1. *Нехай виконуються умови (2), (4). Тоді справедлива формула*

$$P_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(b+zt)^n\gamma(t)\,dt, \tag{5}$$

де

$$\gamma(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{t^{k+1}} \tag{6}$$

аналітична функція в області $|t|>a$*;* Γ *коло* $|t|=R_1$ $(a<R_1<\infty)$.

□ *Доведення.* Через умови (2), (4) ряд (6) рівномірно збігається в області $|t|\geq a_1>a$ і, відповідно, функція $\gamma(t)$ аналітична в області $|t|>a$. Підставивши вираз (6) функції $\gamma(t)$ у праву частину формули (5), одержимо

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(b+zt)^n\gamma(t)dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\sum_{r=0}^{n}\sum_{k=0}^{\infty}C_n^r b^{n-r}a_k z^r t^{r-k-1}dt=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k b^{n-k}a_k z^k\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{dt}{t}=P_n(z).$$

■

Зазначимо, що інтеграл у формулі (5) задає [3] перетворення Мелліна функції $\gamma(t)$.

Властивість 2. *Нехай виконуються умови (2), (3). Тоді твірна функція системи поліномів (1) зображується у вигляді добутку двох функцій*

$$F(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}P_n(z)=F_1(zt)\,e^{bt},$$

де

$$F_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} z^k$$

аналітична функція в області $|z| < \frac{1}{A}$.

□ *Доведення.* Змінивши порядок підсумовування у виразі суми добутків поліномів з відповідними степенями комплексної змінної t одержимо вираз твірної функції

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} P_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k b^{n-k}}{k!(n-k)!} t^n z^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_k b^{n-k}}{k!(n-k)!} t^n z^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} (zt)^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b^m}{m!} t^m = F_1(zt) e^{bt}.$$

Аналітичність функції $F_1(z)$ випливає з умов (2), (3). ■

Властивість 3. *Справедливі такі оцінки:*

$$|P_n(z)| \leqslant Mn! A_\varepsilon^n |z|^n \exp\left(\frac{|b|}{A_\varepsilon |z|}\right), \qquad (7)$$

якщо виконуються умови (2), (3) і $A \neq 0$;

$$|P_n(z)| \leqslant m (a_\varepsilon |z| + |b|)^n \qquad (8)$$

якщо виконуються умови (2), (4), де M, $m = const$, $a_\varepsilon = a + \varepsilon$, $A_\varepsilon = A + \varepsilon$, ε *– як завгодно мале додатне число.*

□ *Доведення.* Оцінюючи вираз поліномів (1) з урахуванням співвідношення (3), записаного у вигляді $\frac{|a_k|}{k!} \leqslant M A_\varepsilon^k$, одержимо нерівність (7),

$$|P_n(z)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} C_n^k |a_k| |b|^{n-k} |z|^k \leqslant$$

$$\leqslant Mn! \sum_{k=0}^{n} \frac{A_\varepsilon^k |b|^{n-k}}{(n-k)!} |z|^k =$$

$$= Mn! \sum_{k=0}^{n} \frac{A_\varepsilon^{n-k} |b|^k}{k!} |z|^{n-k} =$$

$$= Mn! A_\varepsilon^n |z|^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(\frac{|b|}{A_\varepsilon |z|}\right)^k \leqslant$$

$$\leqslant Mn! A_\varepsilon^n |z|^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{|b|}{A_\varepsilon |z|}\right)^k =$$

$$= Mn! A_\varepsilon^n |z|^n \exp\left(\frac{|b|}{A_\varepsilon |z|}\right).$$

Нерівність (8) одержимо з (1) з урахуванням нерівності $|a_k| \leqslant m a_\varepsilon^k$. Дійсно,

$$|P_n(z)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} C_n^k |a_k| |b|^{n-k} |z|^k =$$

$$= m \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_\varepsilon^k |b|^{n-k} |z|^k = m (a_\varepsilon |z| + |b|)^n.$$

■

Властивість 4. *Нехай виконуються умови (2). Тоді система поліномів (1) повна і незалежна у просторі функцій* $f(z) \in E_R$, *аналітичних у крузі* $|z| < R$ $(0 < R \leqslant \infty)$.

□ *Доведення.* Через умови (2) функції z^k $(k = \overline{0, \infty})$ однозначно виражаються через поліноми $P_n(z)$ і тому [3] система (1) повна і незалежна у просторі E_R. ■

Природно виникає задача розвинення функцій в ряди за системою поліномів (1). Спочатку знайдемо залежність степенів z^k від поліномів системи (1). Шукаємо їх у вигляді

$$z^k = \frac{1}{a_k} \sum_{n=0}^{k} C_k^n g_{k-n} P_n(z).$$

Підставивши сюди вирази поліномів і прирівнявши коефіцієнти біля степенів z^k, знайдемо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів g_k $(k = 0, 1, ...)$

$$\sum_{r=n}^{k} C_k^r C_r^n b^{r-n} g_{k-r} = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k. \end{cases} \qquad (9)$$

Враховуючи тут формулу [7]

$$\sum_{r=n}^{k} (-1)^{k-r} C_k^r C_r^n = \delta_{nk}, \qquad (10)$$

де $\delta_{nk} = 1$ при $n = k$ і $\delta_{nk} = 0$ при $n \neq k$, одержимо розв'язки $g_k = (-b)^k$ $(k = 0, 1, ...)$. Отже, степені z^k виражаються через поліноми за формулою

$$z^k = \frac{1}{a_k} \sum_{n=0}^{k} C_k^n (-b)^{k-n} P_n(z). \qquad (11)$$

Тепер, нехай функція $f(z)$ аналітична в крузі $|z| < R$ $(0 < R \leqslant \infty)$, $f(z) \in E_R$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n. \qquad (12)$$

Знайдемо формальне розвинення цієї функції за системою поліномів (1). Підставивши вирази степенів (11) у формулу (12) і змінивши порядок підсумовування, одержимо

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k (-b)^{n-k}}{a_n} P_k(z) \sim$$

$$\sim \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \frac{C_n^k (-b)^{n-k}}{a_n} \right) P_k(z).$$

Ввівши тут позначення

$$L_k(f) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \frac{C_n^k (-b)^{n-k}}{a_n}, \qquad (13)$$

матимемо

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} L_k(f)P_k(z). \qquad (14)$$

Якщо існує границя

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt[r]{C_{r+k}^k \left|\frac{b^r}{a_{r+k}}\right|} = l \quad (0 \leqslant l < \infty), \qquad (15)$$

то функції

$$\omega_k(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{C_n^k (-b)^{n-k}}{a_n} \frac{1}{z^{n+1}} \quad (k = 0, 1, ...) \qquad (16)$$

аналітичні в області $|z| > l$ і співвідношення (9) можна подати в інтегральній формі

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} P_n(z)\,\omega_k(z)\,dz = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k, \end{cases}$$

де Γ – додатно орієнтоване коло $|z| = R_1$ $(l < R_1 < R)$, що охоплює особливі точки функцій $\omega_k(z)$.

Коефіцієнти розвинення функції $f(z)$ за системою поліномів також можна записати в інтегральній формі

$$L_k(f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} f(z)\,\omega_k(z)\,dz. \qquad (17)$$

Отже, у випадку існування системи біортогональних функцій (16), кожній функції $f(z)$, аналітичній в області $|z| < R$ $(l < R \leqslant \infty)$, можна поставити у відповідність ряд (14) за системою поліномів (1), коефіцієнти якого визначаються за формулою (17).

Відзначимо основні властивості системи функцій, біортогональних з поліномами систем (1).

Властивість 5. *Нехай виконуються умови (2), (3). Тоді існує формула*

$$\omega_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{t^k \varphi(t)\,dt}{(z+bt)^{k+1}} = \frac{-1}{k!b^{k+1}} \frac{d^k}{dt^k} \left(t^k \varphi(t)\right)\Big|_{t=-\frac{z}{b}}, \qquad (18)$$

де

$$\varphi(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{a_r t^{r+1}} \qquad (19)$$

– аналітична функція в області $|t| > \frac{1}{a}$; Γ *– коло* $|t| = R_1 \left(R_1 > \frac{1}{a}\right)$.

□ *Доведення.* Аналітичність функції $\varphi(t)$ випливає з умов (2), (3). Підставивши функцію (19) у формулу (18) і врахувавши при цьому розвинення $\frac{1}{(z+bt)^{k+1}} = \frac{1}{z^{k+1}} \sum_{m=k}^{\infty} C_m^k \left(\frac{-bt}{z}\right)^{m-k}$, яке справедливе за умови $\left|\frac{bt}{z}\right| < 1$, одержимо формулу (16). Оскільки $|t| = R_1$ і, відповідно, $|z| > |b|\,R_1$, вибравши $R_1 = \frac{1}{a} + \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ – достатньо мала величина, знайдемо $|z| > \frac{|b|}{a} + \varepsilon\,|b|$. Через довільність величини ε, формула (18) справедлива в області $|z| > l = \frac{|b|}{a}$. ■

Властивість 6. *Справедливі оцінки:*

$$|\omega_k(z)| \leqslant \frac{M}{k!A_{-\varepsilon}^k |z|^{k+1}} \exp\left(\frac{|b|}{A_{-\varepsilon}|z|}\right), \qquad (20)$$

якщо виконуються умови (2), (3);

$$|\omega_k(z)| \leqslant \frac{m}{(a_{-\varepsilon}|z| - |b|)^{k+1}}, \qquad (21)$$

якщо виконуються умови (2), (4), де $M, m = const$; $A_{-\varepsilon} = A - \varepsilon$; $a_{-\varepsilon} = a - \varepsilon$.

□ *Доведення.* Оцінивши вираз функції (16) з урахуванням нерівності $\frac{|a_k|}{k!} \geq M_1 A_{-\varepsilon}^k$ $(M_1 = const)$, яка випливає з умови (3), одержимо таку нерівність:

$$|\omega_k(z)| = \left|\sum_{r=0}^{\infty} \frac{C_{r+k}^k (-b)^r}{a_{r+k}} \frac{1}{z^{r+k+1}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{k!M} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{|b|^r}{r!A_{-\varepsilon}^{r+k}} \frac{1}{|z|^{r+k+1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{k!M} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{|b|^r}{r!A_{-\varepsilon}^{r+k}} \frac{1}{|z|^{r+k+1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{k!M_1 A_{-\varepsilon}^k |z|^{k+1}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\frac{|b|}{A_{-\varepsilon}|z|}\right)^r =$$

$$= \frac{1}{k!M_1 A_{-\varepsilon}^k |z|^{k+1}} \exp\left(\frac{|b|}{A_{-\varepsilon}|z|}\right).$$

Звідси випливає оцінка (20).

Через умови (4) маємо нерівність $|a_k| \geq m_1 a_{-\varepsilon}^k$. Оцінивши вираз функції (16) з урахуванням цієї нерівності, одержимо оцінку

$$|\omega_k(z)| = \left|\sum_{r=0}^{\infty} \frac{C_{r+k}^k (-b)^r}{a_{r+k}} \frac{1}{z^{r+k+1}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{m_1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{C_{r+k}^k |b|^r}{a_{-\varepsilon}^{r+k}} \frac{1}{|z|^{r+k+1}} = \frac{a_{-\varepsilon}}{m_1} \frac{1}{(a_{-\varepsilon}|z| - |b|)^{k+1}},$$

яка справедлива за умови $\frac{|b|}{a_{-\varepsilon}|z|} < 1$. З цієї нерівності випливає нерівність (21). ■

II. Розвинення аналітичних функцій

Формулу (17) для визначення коефіцієнтів розвинення аналітичної функції $f(z)$ за системою поліномів (1) запишемо з урахуванням подання (18) у вигляді

$$L_k(f) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(z)\,\omega_k(z)\,dz =$$

$$= \frac{-1}{k!b^{k+1}}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(z)\left.\frac{d^k}{dt^k}\left(t^k\varphi(t)\right)\right|_{t=-\frac{z}{b}}dz.$$

Зробивши тут заміну $z=-bt$ і зінтегрувавши k разів за частинами, одержимо ще таку формулу:

$$L_k(f) = \frac{(-1)^k}{k!b^k}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^*}\frac{d^k f(-bt)}{dt^k}\,\Phi_k(t)\,dt, \qquad (22)$$

де

$$\Phi_k(t) = \sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{a_n t^{n-k+1}}$$

– головна частина ряду функції $t^k\varphi(t)$; Γ^* – додатно орієнтоване коло $|t|=R_1$ $\left(R_1>\frac{1}{a}\right)$.

Якщо функція $f(z)$ задана степеневим рядом (12), то врахувавши формулу (16) у виразі (17) для коефіцієнтів ряду цієї функції за системою поліномів (1),

$$L_k(f) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(z)\,\omega_k(z)\,dz =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{C_n^k(-b)^{n-k}f^{(r)}(0)}{r!a_n}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{1}{z^{r-n+1}}dz,$$

одержимо формулу

$$L_k(f) = \sum_{n=k}^{\infty}\frac{C_n^k f^{(n)}(0)(-b)^{n-k}}{n!a_n}. \qquad (23)$$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (2), (3) і $A\neq 0$. Тоді для функції $f(z)\in E_R$ $(0<R\leqslant\infty)$ справедлива формула*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}L_k(f)P_k(z), \qquad (24)$$

де $L_k(f)$ – коефіцієнти, що визначаються за формулою (23).

□ *Доведення.* Оцінимо суму ряду у правій частині формули (14). За умовою існують нерівності $M_1A_{-\varepsilon}^k\leqslant\left|\frac{a_k}{k!}\right|\leqslant M_1A_\varepsilon^k$, $\frac{\left|f^{(k)}(0)\right|}{k!}\leqslant\frac{M_0}{R_0^k}$ $(0<R_0<R,\ M_i=const)$. Врахувавши їх і нерівності (7), (20) при оцінці суми ряду (14), знайдемо

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k(-b)^{n-k}}{a_n}P_k(z)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M_0}{M_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(R_0A_{-\varepsilon})^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{|b|^{n-k}|P_k(z)|}{(n-k)!k!}=$$

$$=M\exp\left(\frac{|b|}{A_\varepsilon|z|}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(R_0A_{-\varepsilon})^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{|b|^{n-k}}{(n-k)!}A_\varepsilon^k|z|^k=$$

$$=M\exp\left(\frac{|b|}{A_\varepsilon|z|}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(R_0A_{-\varepsilon})^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{|b|^k}{(k)!}A_\varepsilon^{n-k}|z|^{n-k}<$$

$$<M\exp\left(\frac{|b|}{A_\varepsilon|z|}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A_\varepsilon|z|}{R_0A_{-\varepsilon}}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k)!}\left(\frac{|b|}{A_\varepsilon|z|}\right)^k=$$

$$=M\exp\left(\frac{2|b|}{A_\varepsilon|z|}\right)\left(1-\frac{A_\varepsilon|z|}{R_0A_{-\varepsilon}}\right)^{-1}.$$

При виконанні умови $\frac{A_\varepsilon|z|}{A_{-\varepsilon}R_0}<1$ одержані тут ряди збігаються і, відповідно, рівномірно збігається ряд (24) в області $|z|<R$. ■

Зауважимо, що за умов теореми система поліномів (1) базис в просторі E_R [6].

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (2), (4) і $f(z)\in E_R$ $\left(\frac{2|b|}{a}<R\leqslant\infty\right)$. Тоді для функції $f(z)$ в крузі $|z|<R-\frac{2|b|}{a}$ справедлива формула (24), в якій коефіцієнти ряду визначаються за формулами (22).*

□ *Доведення.* Оскільки степеневий ряд (12) функції $f(z)$ рівномірно збігається в області $|z|\leq\leqslant R_0$ $(0<R_0<R)$, формально перетворивши його з урахуванням формули (11), одержимо формулу (14). За умовою члени послідовностей і коефіцієнти відповідних рядів задовольняють такі нерівності: $m_1a_{-\varepsilon}^k\leqslant\leq|a_k|\leqslant m_1a_\varepsilon^k$, $\frac{\left|f^{(k)}(0)\right|}{k!}\leqslant\frac{M_0}{R_0^k}$ $(m_i,\ M_0=const)$. Врахувавши їх і нерівності (8), (21) під час оцінювання суми ряду (14), одержимо

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k(-b)^{n-k}}{a_n}P_k(z)\right|\leqslant$$

$$\leqslant M\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(R_0a_{-\varepsilon})^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k|b|^{n-k}\left(a_\varepsilon|z|+|b|\right)^k=$$

$$=M\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_\varepsilon|z|+2|b|}{R_0a_{-\varepsilon}}\right)^n.$$

За умови $|z|<\frac{a_{-\varepsilon}}{a_\varepsilon}\left(R_0-\frac{2|b|}{a_{-\varepsilon}}\right)$ сума цього ряду існує. Отже, ряд (24) рівномірно збігається і його сума дорівнює $f(z)$ в області $|z|\leqslant R-\frac{2|b|}{a}$. ■

Наслідок 1. Нехай виконуються умови (2), (4). Тоді система поліномів (1) – базис в просторі цілих функцій.

Цей результат випливає безпосередньо з теореми, якщо врахувати, що $R=\infty$.

Приклад 1. Розглянемо систему поліномів (1) для випадку $a_k = 1$. Тоді за формулами (1) і (19) знайдемо

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b^{n-k} z^k = (z+b)^n, \quad \varphi(t) = \frac{1}{t-1}.$$

За теоремою 2, якщо $f(z) \in E_R$ $(R > 2|b|)$, то ряд (24) рівномірно збігається в області $|z| < R - 2|b|$. Формула (22) для коефіцієнтів розвинення функції з урахуванням подання

$$\Phi_n(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{z^{k-n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}} = \frac{1}{t-1},$$

набуде вигляду

$$L_n(f) = \frac{(-1)^n}{n!b^n} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^*} \frac{d^n f(-bt)}{dt^n} \frac{1}{t-1} dt =$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!b^n} \left.\frac{d^n f(-bt)}{dt^n}\right|_{t=1} = \frac{1}{n!} \frac{d^n f(-b)}{dz^n}.$$

Отже, ряд функції за системою поліномів $\{(z+b)^n\}$ є рядом Тейлора.

Приклад 2. Розглянемо систему поліномів (1), утворених за формулою (5) з використанням функції $\gamma(t) = Ln\frac{t}{t-1} = -Ln\left(1 - \frac{1}{t}\right) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\, t^{k+1}}$. Тоді $a_k = \frac{1}{k+1}$ і за формулами (5) і (19) знайдемо

$$\left\{ P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k b^{n-k}}{(k+1)} z^k \right\}_{n=0}^{\infty}, \qquad \varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{t^{k+1}} = \frac{t}{(t-1)^2}. \tag{25}$$

Нехай $f(z)$ ціла функція. Врахувавши вираз функції

$$\Phi_n(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k+1}{t^{k-n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+n+1}{t^{k+1}} = \frac{n}{t-1} + \frac{t}{(t-1)^2},$$

коефіцієнти ряду функції $f(z)$ обчислимо за формулою (22)

$$L_n(f) = \frac{1}{n!(-b)^n} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{d^n f(-bt)}{dt^n} \Phi_n(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{n!(-b)^n} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{d^n f(-bt)}{dt^n} \left[\frac{n}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2} \right] dt =$$

$$= \frac{n}{n!(-b)^n} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{d^n f(-bt)}{dt^n} \frac{1}{t-1} dz +$$

$$+ \frac{1}{n!(-b)^n} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{d^n f(-bt)}{dt^n} \frac{1}{(t-1)^2} dz =$$

$$= \frac{1}{n!(-b)^n} \left[n \frac{d^n f(-bt)}{dt^n} + \frac{d^{n+1} f(-bt)}{dt^{n+1}} \right] \Bigg|_{t=1} =$$

$$= \frac{1}{n!} \left[n \frac{d^n f(-b)}{dz^n} - b \frac{d^{n+1} f(-b)}{dz^{n+1}} \right].$$

Отже, якщо $f(z)$ ціла функція, то за теоремою 2 її розвинення за системою поліномів (25) має вигляд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[n \frac{d^n f(-b)}{dz^n} - b \frac{d^{n+1} f(-b)}{dz^{n+1}} \right] P_n(z).$$

III. Застосування до розв'язування диференціальних рівнянь з частинними похідними

Розглянемо диференціальне рівняння з частинними похідними з поліноміальними коефіцієнтами

$$\sum_{r=0}^{k} \sum_{l=0}^{k-r} a_r^l x_2^{r+l} \frac{\partial^{r+l} U}{\partial x_1^r \partial x_2^l} = 0, \tag{26}$$

де x_1, x_2 – дійсні змінні; a_r^l – дійсні числа.

Розв'язки рівняння (26) зображуються [1, 10] у вигляді контурних інтегралів

$$U = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} K(x_1 + x_2 t) \gamma(t)\, dt, \tag{27}$$

де $K(z)$ – функція, що визначається з крайових умов задачі; Γ – замкнутий контур у комплексній площині, що охоплює особливі точки функції $\gamma(t)$; $\gamma(t)$ – сингулярний розв'язок диференціального рівняння

$$\sum_{l=0}^{k} (-1)^l \frac{d^l}{dt^l} \left(\gamma \sum_{r=0}^{l} a_r^{l-r} t^{l-r} \right) = 0. \tag{28}$$

Для випадку розвинення функції $K(z)$ у степеневий ряд розв'язків відповідної крайової задачі можна подати у вигляді суми ряду за системою поліномів вигляду (1).

Приклад 1. Знайдемо розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} - (p+q) \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} + pq \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = 0 \qquad (-\infty < x_1 < h, \ \infty < x_2 < \infty), \tag{29}$$

який задовольняє граничну умову

$$U(h, x_2) = f(x_2), \tag{30}$$

де $f(x_2) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x_2^k$ – ціла функція.

Диференціальне рівняння (28), що відповідає рівнянню (29), набуде вигляду $\frac{d^2}{dt^2}\left(\gamma\left(t^2 - (p+q)\, t + pq\right)\right) = 0$. Його сингулярний розв'язок такий:

$$\gamma(t) = \frac{1}{t-p} + \frac{1}{t-q} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{1}{t^{k+1}}, \tag{31}$$

де $a_k = p^k + q^k$.

Розв'язок рівняння (29) шукаємо у вигляді контурного інтегралу (27), в якому Γ – коло $|t| = R_0 > R = \max\{p, q\}$. Функцію $K(z)$ шукаємо у вигляді суми ряду

$$K(x_1 + x_2 t) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k (x_1 + x_2 t)^k . \tag{32}$$

Підставивши формулу (27) у граничну умову (30), одержимо інтегральне рівняння відносно функції $K(z)$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} K(h + x_2 t)\, \gamma(t)\, dt = f(x_2) \tag{33}$$

або, врахувавши подання (32) і ввівши поліноми

$$P_k(h, x_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (h + x_2 t)^k \gamma(t)\; dt = \sum_{r=0}^{k} C_k^r h^{k-r} a_r x_2^r, \tag{34}$$

запишемо його у вигляді

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_k P_k(h, x_2) = f(x_2) . \tag{35}$$

Отже, побудова розв'язку рівняння (33) зводиться до відшукання коефіцієнтів S_k $(k = 0, 1, ...)$, тобто, розвинення функції $f(x_2)$ за системою поліномів (34).

Запишемо це розвинення у формі (24),

$$f(x_2) = \sum_{k=0}^{\infty} L_k(f)\, P_k(h, x_2) . \tag{36}$$

Розглянемо систему (34) у комплексній площині і запишемо її твірну функцію

$$F(z\xi, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^k}{k!} (h + x_2 t)^k \gamma(t)\; dt =$$

$$= e^{h\xi} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{x_2 \xi\, t}\, \gamma(t)\, dt = \left(e^{p x_2 \xi} + e^{q x_2 \xi}\right) e^{h\xi}.$$

Звідси маємо $F_1(t) = e^{pt} + e^{qt} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} t^k$, $e^{ht} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} t^k$. За формулою (16) запишемо функції, біортогональні з поліномами (34),

$$\omega_k(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{C_n^k (-h)^{n-k}}{a_n} \frac{1}{z^{n+1}} . \tag{37}$$

Система поліномів (34) задовольняє умови теореми 2 і, тому, коефіцієнти розвинення цілої функції $f(x_2)$ за цією системою визначаємо за формулою (23)

$$L_k(f) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{C_n^k (-h)^{n-k} f^{(n)}(0)}{n!\, a_n} . \tag{38}$$

Таким чином розв'язок задачі (29), (30) з урахуванням зображень (27) і (32), а також рівності $S_k = L_k(f)$, що випливає з формул (35) і (36), запишемо у вигляді

$$U = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \sum_{k=0}^{\infty} L_k(f) (x_1 + x_2 t)^k \gamma(t)\; dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} L_k(f) \int_{\Gamma} (x_1 + x_2 t)^k \gamma(t)\; dt$$

або

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} L_k(f) P_k(x_1, x_2) . \tag{39}$$

Тут коефіцієнти $L_k(f)$ визначаємо за формулою (38) і введено поліноми за двома змінними

$$P_k(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (x_1 + x_2 t)^k \gamma(t)\; dt = \sum_{r=0}^{k} C_k^r a_r x_1^{k-r} x_2^r. \tag{40}$$

Перевіримо виконання граничної умови (30). Підставивши формули (38), (40) у вираз розв'язку (39) і прийнявши $x_1 = h$, а також врахувавши формулу (10), одержимо степеневий ряд функції $f(x_2)$.

Література

[1] Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Харьков: ДНТВУ, 1939. – 720 с.

[2] Гайер Д. Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. – М.: Мир, 1986. – 216 с.

[3] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1974. – 576 с.

[4] Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. – М.: Гостехиздат, 1956.

[5] Леонтьев А.Ф. Последовательности полиномов из экспонент. М.: Наука, 1980. – 384 с.

[6] Маркушевич А.И. Избранные главы теории аналитических функций. – М.: Наука, 1976. – 192 с.

[7] Прудников А.П., Брычков А.П., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1981. – 798 с.

[8] Суетин П.К. Ортогональные многочлены по двум переменным. – М.: Наука, 1988. – 384 с.

[9] Сухорольский М.А. Интегральное представление решений уравнений с частными производными с полиномиальными коэффициентами. /Гос. ун-т "Львiвська политехнiка". – Львов, 1994. – 15 с. – Рус. Деп. в ГНТБ Украины, 07.02.94, №250 Ук94.

[10] Сухорольський М.А. Інтегральне зображення функцій, біортогональних з алгебраїчними многочленами //Вісник держ. ун-ту "Львівська політехніка". Прикладна математика. – 1998. № 346. – С. 111 – 115.

EXPANTION OF ANALITICAL FUNCTIONS BY THE SYSTEMS OF MELLIN TYPE POLYNOMIALS

M. Sukhorolsky

Lviv Polytechnic National University
12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine

The system of polynomials which are integral transformations of Mellin functions (with power kernels) being analytical in infinitely distant point is considered in the paper. Condition of polynomials and biorthogonal to them functions in the form of contour integrals are investigated. Sufficient conditions of functions expansion in series by polynomials are also studied. Examples of functions expansion in series and construction of solutions of equations with partial derivatives are presenting.

Keywords: biorthogonal system of polynomials, contour integral, series by polynomials.

2000 MSC: 41A10

UDK: 517.53.57