

Про математичне моделювання процесів притоку води до котловану

Галина Суханицька, Сергій Каштан

Кафедра інформатики та прикладної математики, Рівненський державний гуманітарний університет, УКРАЇНА, м.Рівне, вул.Остафова, 31, E-mail: as024@ua.fm

Abstract – The algorithm of numeral decision of inverse nonlinear boundary-value problems on the quasiconformal reflections of the curvilinear quadrangular areas limited by the lines of flow and equipotential lines was built. On this basis a toy problem about the inflow of water by foundation pit is solved, computation of the field of speed of filtration is conducted.

Ключові слова – inverse nonlinear boundary-value problems, conformal mappings, potential, the function of current, lines of flow, equipotential lines, theory of filtration, process of movement of water, filtration expense, field of filtration, hydrodynamic grid of movement.

I. Вступ

Дослідженню фільтраційних полів присвячено багато наукових і прикладних праць. Це зумовлено, в першу чергу, практичними запитами. Дослідження фільтраційних процесів в різних середовищах має першочергове значення при розгляді проблем екології, проектування та функціонування гідротехнічних і гідромеліоративних споруд, а також оптимізації інших гідросистем. Тому, екологічні проблеми, пов'язані з результатами діяльності людини, які впливають на стан навколишнього середовища, стають усе більш актуальними, поступово займаючи провідне місце серед глобальних питань сучасності.

Як відомо, закони руху рідини в пористому середовищі вивчає теорія фільтрації. Результати досліджень цієї теорії застосовуються при проектуванні, будівництві та подальшій експлуатації гідротехнічних та гідромеліоративних споруд; при розв'язанні найважливіших практичних задач з різноманітних розділів математики (гідро-, аеродинаміка; теорія пружності; електростатичні, магнітні і теплові поля і т.п.). Вирішення практично важливих проблем теорії фільтрації, таких як розробка нафтових, газових і водних родовищ, будівництво гідротехнічних і гідромеліоративних споруджень, моніторинг і охорона навколишнього середовища від забруднення, вимагає створення відповідних нових математичних моделей у неоднорідних середовищах. Для кількісного оцінювання стану середовищ, що знаходяться під дією меліоративних та інших антропогенних заходів, ефективними є методи математичного моделювання.

II. Аналіз останніх досліджень

У роботах [1 – 5] побудовано алгоритми числового обернення розв'язків нелінійних крайових задач на конформні і квазіконформні відображення в криволінійних чотирикутних областях, обмежених лініями течії та еквіквізипотенціальними лініями – математичних моделей процесів руху рідин, газів, заряджених частинок тощо в однорідних і неод-

норідних, ізотропних та анізотропних середовищах. Зокрема, у роботах [1, 2] подається розв'язання задачі про моделювання відповідних процесів у ізотропних та анізотропних середовищах, а у [3] – алгоритм розв'язання відповідних задач у середовищах, схильних до деформацій під дією градієнту потенціалу. Запропонований підхід дозволяє паралельно визначати характеристичну функцію течії, квазікомплексний потенціал, повну фільтраційну витрату, градієнти потенціалу та поле швидкості і побудувати гідродинамічну сітку руху.

У роботах [4, 5] йдеться про побудову алгоритму та розрахунок процесу руху води із зволожувача в ґрунт на прикладі роботи зрошувальної системи (системи водопостачання) з урахуванням верхнього родючого шару ґрунту – чорнозему. У цій роботі мова піде про перенесення отриманих раніше результатів (алгоритму) на процеси притоку води до котловану.

III. Постановка задачі

Розглянемо модельну задачу про знаходження гармонічної функції $\varphi = \varphi(x, y)$ (потенціалу) в однозв'язній криволінійній чотирикутній області $G_z = ABCD$ ($z = x + iy$), обмеженої чотирма гладкими кривими $AB = \{z : f_1(x, y) = 0\}$, $BC = \{z : f_2(x, y) = 0\}$, $CD = \{z : f_3(x, y) = 0\}$, $DA = \{z : f_4(x, y) = 0\}$, які в точках A, B, C, D перетинаються під прямим кутом при умовах: $\varphi|_{AB} = \varphi^*$,

$\varphi|_{CD} = \varphi^*$, $\left. \frac{d\varphi}{dn} \right|_{BC} = \left. \frac{d\varphi}{dn} \right|_{DA} = 0$ (де n – зовнішня

нормаль до відповідної кривої). Шляхом введення гармонічної функції $\psi = \psi(x, y)$ (функції течії), комплексно спряженої до $\varphi = \varphi(x, y)$, і заміною останніх двох граничних умов на умови: $\psi|_{BC} = Q$,

$\psi|_{AD} = 0$ (Q – невідомий параметр, повна фільтраційна витрата), цю задачу, як відомо [6], зведено до більш загальної задачі на конформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ області G_z на відповідну область комплексного потенціалу $G_\omega = \{\omega : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$ [1 – 3].

Тоді, відповідна обернена крайова задача на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z при невідомому Q в диференціальній формі запишеться у вигляді:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (1)$$

$$\begin{cases} f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \\ f_3(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \\ f_2(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, \\ f_4(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq \psi \leq Q, \\ \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*. \end{matrix} \quad (2)$$

Оскільки функції $x = x(\varphi, \psi)$ та $y = y(\varphi, \psi)$ задовольняють умови Коші-Рімана (1), то кожна із них є гармонічною в області G_ω , що дозволяє звести цю задачу до розв'язування в G_ω рівнянь Лапласа

$$\Delta x = 0, \quad \Delta y = 0 \quad (3)$$

при заданих нелінійних крайових умовах (2) та умовах Коші-Рімана (1) на границі ∂G_ω області G_ω , які в деяких випадках зручно замінити на умови ортогональності ліній течії та еквіпотенціальних ліній до відповідних ділянок границі фізичної області.

IV. Розв'язання задачі

Алгоритм чисельного розв'язання поставленої задачі побудуємо аналогічно до [1 – 3]. А саме, різницеві аналоги рівнянь (3) та крайових умов (2) у відповідній рівномірній сітковій області $G_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_* + \Delta\varphi \cdot i, i = \overline{0, m+1}; \psi_j = \Delta\psi \cdot j,$

$$j = \overline{0, n+1}; \Delta\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{m+1}, \Delta\psi = \frac{Q}{n+1}, \gamma = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi}, \quad m, n \in \mathbf{N} \}$$

запишемо, згідно з [7], у вигляді:

$$\begin{cases} x_{i+1,j} - 2(1+\gamma^2)x_{i,j} + x_{i-1,j} + \gamma^2(x_{i,j-1} + x_{i,j+1}) = 0, \\ i = \overline{1, m}, \\ y_{i+1,j} - 2(1+\gamma^2)y_{i,j} + y_{i-1,j} + \gamma^2(y_{i,j-1} + y_{i,j+1}) = 0, \\ j = \overline{1, n}; \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} f_1(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, \\ f_3(x_{m+1,j}, y_{m+1,j}) = 0, \\ f_2(x_{i,n+1}, y_{i,n+1}) = 0, \\ f_4(x_{i,0}, y_{i,0}) = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} j = \overline{0, n+1}, \\ i = \overline{0, m+1}. \end{matrix} \quad (5)$$

Приграничні умови ортогональності (додаткові умови для граничних та приграничних вузлів) у сітковій області G_ω^γ запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} & f_{1x}'(x_{0,j}, y_{0,j})(y_{1,j} - y_{0,j}) - \\ & - f_{1y}'(x_{0,j}, y_{0,j})(x_{1,j} - x_{0,j}) = 0, \\ & f_{2x}'(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})(y_{i,n} - y_{i,n+1}) - \\ & - f_{2y}'(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})(x_{i,n} - x_{i,n+1}) = 0, \\ & f_{3x}'(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})(y_{m,j} - y_{m+1,j}) - \\ & - f_{3y}'(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})(x_{m,j} - x_{m+1,j}) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f_{4x}'(x_{i,0}, y_{i,0})(y_{i,1} - y_{i,0}) - \\ & - f_{4y}'(x_{i,0}, y_{i,0})(x_{i,1} - x_{i,0}) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$i = \overline{0, m+1}, \quad j = \overline{0, n+1}.$$

Формулу для знаходження величини γ одержимо на підставі умови конформної подібності в малому [6] відповідних чотирикутників (прямокутників) двох областей:

$$\gamma = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \gamma_{i,j}, \quad (7)$$

$$\gamma_{i,j} = \frac{\sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j})^2}},$$

де $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$.

Відповідний алгоритм наближення розв'язку цієї задачі в загальному випадку будемо шляхом поетапної параметризації параметра γ (або витрати Q), граничних та внутрішніх вузлів сітки G_ω^γ з використанням ідей методу блочної ітерації (див., напр., [8]) для аналітичного обґрунтування його збіжності. А саме, задавши кількість вузлів розбиття сіткової області G_ω m та n , параметр ε , що характеризує точність роботи алгоритму розв'язання відповідної різницевої задачі (1) – (2), початкові наближення координат граничних вузлів $x_{0,j}^{(0)}, y_{0,j}^{(0)}, x_{m+1,j}^{(0)}, y_{m+1,j}^{(0)}, x_{i,n+1}^{(0)}, y_{i,n+1}^{(0)}, x_{i,0}^{(0)}, y_{i,0}^{(0)}$ (так, щоб виконувались умови (5)) та початкові наближення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$, $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$ (наприклад, як середні арифметичні значення відповідних координат граничних вузлів), знаходимо початкове наближення $\gamma^{(0)} = \gamma(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ невідомої величини γ за формулою (7).

Уточнення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(k)}, y_{i,j}^{(k)})$ ($k = 0, 1, \dots$ – крок ітерації) проводимо за допомогою ітераційних схем типу “хрест” (в загальному випадку – схем типу “ящик” з використанням масових операторів) [7] шляхом розв'язання (4) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$.

Нові наближення $\gamma^{(k+1)}$ та $Q^{(k+1)}$ величин γ та Q знаходимо за формулами (7) та $Q = \Delta\varphi \cdot \frac{n+1}{\gamma}$. Далі, підправляємо координати граничних вузлів, розв'язуючи наближено систему рівнянь (5)-(6), наприклад, методом Ньютона [9] та перевіряємо виконання умов:

$$\max_{x_{i,j}, y_{i,j} \in \partial G_z} \left(\left| x_{i,j}^{(k+1)} - x_{i,j}^{(k)} \right|, \left| y_{i,j}^{(k+1)} - y_{i,j}^{(k)} \right| \right) < \varepsilon,$$

$$\left| Q^{(k+1)} - Q^{(k)} \right| < \varepsilon, \left| D^{(k+1)} - D^{(k)} \right| < \varepsilon, \quad (8)$$

$$D = \frac{\sum_{i,j=0}^{m,n} \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j})^2}}{(m+1)(n+1)}$$

де D – усереднене відношення довжин діагоналей криволінійних чотирикутників сіткової області G_z^y .

Уточнення координат внутрішніх вузлів проводимо доти, поки не виконуються умови (8), після чого обчислюємо нев'язку конформності отриманої сітки руху за формулою $\varepsilon_* = |1 - D|$. Якщо ж потрібно збільшити ступінь точності наближеного розв'язку (зменшити нев'язку ε_*), то збільшуємо m і n та розв'язуємо різницеву задачу заново (оптимальність співвідношення між m та n досягається шляхом оптимізації відповідних функціоналів).

V. Практичне застосування моделі

Розглянута модельна задача теорії фільтрації може бути використана (виникає), зокрема, при дослідженні екологічних проблем, пов'язаних із притоком води до котловану, в т.ч. забрудненої води, а також при будівництві основ та фундаментів різноманітних споруд. Так збільшення потужності котловану призводить до порушення екологічного балансу, збільшенню вартості будівництва. Зниження – призводить до невиконання проектних завдань.

При плоско-паралельному русі води до котловану схема задачі має вигляд області обмеженої двома замкненими кривими – екіпотенціальними лініями (див. рис. 1). Але в силу симетрії картини, ми можемо розглядати четверту частину такої області (див. рис. 2).

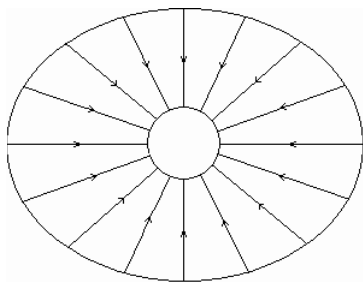


Рис. 1. Схема задачі

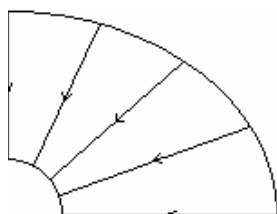


Рис. 2. Розрахункова область

Висновок

Побудований нами алгоритм розв'язання модельних задач теорії фільтрації дозволяє враховувати властивості середовища та характеристики процесу. Розв'язок задачі отримується шляхом поетапного фіксування характеристик середовища та процесу і врахування механізму їх взаємовпливу.

Не врахування ряду факторів при будівництві може призвести до підтоплення основ та фундаментів, а згодом і до їх втрати міцності та руйнування. А це в свою чергу, може призвести до катастрофи. Результати проведених нами досліджень у цій та подібних роботах підводять до необхідності перегляду пов'язаних з фільтраційними розрахунками (при прогнозуванні та проектуванні дренажних споруд та оптимізації інших гідросистем) стандартів з метою їх уточнення.

References

- [1] Бомба, А.Я. Чисельне розв'язання обернених нелінійних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення // Волинський математичний вісник. – 2001. – Вип. 8. – С.9–22.
- [2] Бомба, А.Я. Нелінійні обернення крайових задач на квазіконформні відображення в анізотропних середовищах // Вісник Київського університету. Сер. фізико-математичні науки. – 2001, №4. – С.182–195.
- [3] Бомба, А.Я. Нелінійні обернення крайових задач на квазіконформні відображення при моделюванні впливу градієнтів потенціалу на процес фільтрації // Математичні методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – 45, №2. – С.49–57.
- [4] Каштан, Н.Б. До питання моделювання нелінійних процесів фільтрації води із зволожувача в ґрунт / Н.Б.Каштан // Одинадцята Всеукраїнська (шоста Міжнародна) студентська наукова конференція з прикладної математики та інформатики СНКПМІ-2008. – Львів, 2008. – С.115–116.
- [5] Каштан, Н.Б. Математичне моделювання нелінійних процесів фільтрації із зволожувача в ґрунт / Н.Б.Каштан // Матеріали III Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів та науковців «Інформаційні технології в професійній діяльності». – Рівне, 2009. – С.97–99.
- [6] Лаврентьев, М.А. Методы теории функции комплексного переменного / М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат. – Москва: Наука, 1973. – 736с.
- [7] Самарський, А.А. Теория разностных схем / А.А.Самарський. – Москва: Наука, 1977. – 656с.
- [8] Ортега, Д. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Д.Ортега, В.Рейнболдт. – Москва: Мир, 1975. – 558с.
- [9] Марчук, Г.И. Методы вычислительной математики / Г.И.Марчук. – К.: Наук. думка, 1980. – 334с.