Я. Ковівчак
Національний університет "Львівська політехніка"

УДК 614.313

КАЛІБРУВАННЯ ПОТЕНЦІАЛІВ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ В МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЯХ ПРИСТРОЇВ АВТОМАТИКИ

Розглядаються способи калібрування рівнянь електромагнітного поля, сформованих відносно векторного і скалярного потенціалів при побудові польових математичних моделей пристроїв автоматики. Показано, що для розробки моделей на основі потенціалів найбільш доцільним з математичної точки зору та допустимим з фізичної є використання калібрування $\nabla\varphi = 0$. Таке калібрування максимально спрощує систему розрахункових рівнянь, не спотворюючи при цьому електромагнітний процес у векторах H, E, B, D.

In paper the methods of calibration of the equations of an electromagnetic field about a vector and scalar potentials are considered at build-up of field mathematical models of devices of automation. Is shown, that for creation of models on the basis of potentials most expedient from the mathematical point of view and valid from physical point of view is usage of calibration $\nabla\varphi = 0$. Such calibration maximum simplifies the system of the calculations equations, not distorting thus the electromagnetic process in vectors H, E, B, D.

Вступ

Сьогодні, завдяки значному розвитку обчислювальної техніки великий інтерес викликає використання методів теорії електромагнітного поля для побудови ефективних математичних моделей пристроїв автоматики. Такі моделі відкривають нові можливості при аналізі електромагнітних явищ в конструктивних елементах пристроїв в різних режимах.

Точність розрахунку математичних моделей, розроблених на основі рівнянь електромагнітного поля, на порядок вища від точності традиційних колових моделей. Завдяки цьому польові моделі можуть знайти широке застосування в задачах аналізу та синтезу як окремих елементів, так і систем автоматики та управління загалом.

На практиці використовують декілька способів побудови польових математичних моделей. У певних задачах моделі побудовані на основі рівнянь Максвелла, записаних відносно основних векторів **H**, **E**, **B**, **D**. Такий підхід передбачає розрахунок електромагнітного процесу за допомогою диференціальних рівнянь, сформованих стосовно векторів електричної та магнітної індукції **D** і **B**. Оскільки шукані функції просторово-часові, виникає необхідність, не порушуючи основних законів електромагнетизму, задавати початкові й крайові умови для величин **D** і **B** одночасно. Іноді це значно ускладнює знаходження розв'язку.

У більшості випадків польові математичні моделі будуються на основі рівнянь векторного і скалярного потенціалів. При цьому підході після прийняття необхідного калібрування розрахункова система диференціальних рівнянь значно спрощується, а граничні та початкові умови задаються лише для однієї функції.

На вибір системи рівнянь для розрахунку електромагнітного поля пристроїв впливає ціла низка факторів, а саме: можливість отримання мінімальної кількості рівнянь; необхідність простого і адекватного знаходження крайових та початкових умов для утвореної системи з точки зору фізики процесу; прийняті в моделі припущення; конструктивні особливості пристрою та ін.

Польові математичні моделі складових елементів систем автоматики й управління найбільш доцільно будувати з використанням диференціальних рівнянь, записаних відносно векторного та скалярного потенціалів. При розв'язанні такої системи отримують просторово-часові розподіли шуканих функцій і тим самим вичерпну інформацію про характер проходження електромагнітного процесу загалом. За необхідності можна перейти до векторів **H**, **E**, **B**, **D**.

Використання в моделях потенціалів у повних рівняннях ускладнює розрахунковий процес. Це викликано необхідністю задання певної взаємовизначеності між функціями векторного і скалярного потенціалів. Така взаємовизначеність повинна бути однозначною і відповідати фізичній сутності явища в даному пристрої. Її називають калібруванням рівнянь електромагнітного поля. Без прийняття того чи іншого калібрування розв'язати утворену систему практично неможливо.

Формулювання проблеми

Основною метою вибору способу калібрування є спрощення системи розрахункових рівнянь в потенціалах. У різних задачах математичного моделювання пристроїв автоматики це питання розв'язується по-різному. Найбільш широкого застосування на практиці знайшло калібрування скалярного потенціалу виду - $\nabla\varphi = 0$. При використанні такого калібрування отримують систему рівнянь, сформовану стосовно однієї просторово-часової змінної – векторного потенціалу електромагнітного поля.

Незалежно від вибору калібрування для адекватного відображення фізичного процесу необхідно забезпечити однозначність переходу від рівнянь електромагнітного поля в потенціалах до рівнянь у векторах **H**, **E**, **B**, **D**. Лише при дотриманні цієї умови можна стверджувати про відповідність розроблених польових математичних моделей реальним фізичним аналогам. Існують певні сумніви відносно справедливості калібрування $\nabla\varphi = 0$ стосовно інваріантності переходу до традиційних векторів.

Аналіз проблеми

Функції векторного і скалярного потенціалів одними із перших ввели у використання Гендрік Антон Лорентц [1] і Анрі Пуанкаре [2]. Вони прийшли до цих величин з математичних міркувань. З природи електромагнітних явищ відомо, що розходження вектора магнітної індукції в просторі дорівнює нулю

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 . \qquad (1)$$

Основні положення векторного аналізу говорять, що дивергенція ротора довільного вектора теж дорівнює нулю. Виходячи з цього, можна ввести нову функцію у вигляді

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} , \tag{2}$$

де **A** – векторний потенціал електромаґнітного поля.

Беручи до уваги рівняння Максвелла, які математично описують електромаґнітний процес в просторі у вигляді

$$\nabla \times \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} ; \tag{3}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \tag{4}$$

де **H** – вектор напруженості маґнітного поля; **E** – вектор напруженості електричного поля; **B** – вектор маґнітної індукції; **D** – вектор електричної індукції; ∇ – оператор набла; γ – питома електропровідність середовища, з урахуванням (2) рівняння (3) записують по-іншому

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} , \tag{5}$$

або

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 . \tag{6}$$

Як відомо, ротор від градієнта довільної скалярної функції дорівнює нулю. Отже, з урахуванням (6), вектор напруженості електричного поля в потенціалах набуває вигляду

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \cdot \tag{7}$$

де φ – скалярний потенціал електромаґнітного поля.

Після підстановки (2) і (7) в (3), а також враховуючи, що

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho , \tag{8}$$

де ρ – об'ємна густина електричного ладунку в просторі, приходять до рівнянь електромаґнітного поля, записаних відносно векторного і скалярного потенціалів

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t} + \gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\varepsilon \frac{\partial (\nabla \varphi)}{\partial t} - \gamma \nabla \varphi - \nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) ; \tag{9}$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \nabla \varepsilon + \varepsilon \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t} = \rho - \varepsilon \nabla \cdot \nabla \varphi + \nabla \varphi \cdot \nabla \varepsilon , \tag{10}$$

де ε – діелектрична проникливість середовища; μ – обернена магнітна проникливість середовища.

У практичних задачах для рівнянь (9) і (10) використовують калібрування $\nabla\varphi = 0$. При цьому електромагнітне поле розраховують за допомогою (9) у спрощеному вигляді

$$\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t}+\gamma\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=-\nabla\times\left(\nu\nabla\times\mathbf{A}\right). \tag{11}$$

Проаналізуємо калібрування $\nabla\varphi = 0$.

Математичне моделювання електромагнітних процесів в зонах пристроїв автоматики та управління здійснюється для випадку електрично нейтральних середовищ, тобто

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=0, \tag{12}$$

або

$$\nabla\cdot\left(\varepsilon\mathbf{E}\right)=0. \tag{13}$$

Якщо підставити (7) в (13), отримаємо

$$\nabla\cdot\varepsilon\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+\nabla\varphi\right)=0. \tag{14}$$

Розпишемо операцію дивергенції в рівнянні (14)

$$\nabla\cdot\left(\varepsilon\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)+\nabla\cdot\left(\varepsilon\nabla\varphi\right)=0. \tag{15}$$

Із (15) отримуємо такі вирази

$$\nabla\cdot\left(\varepsilon\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\cdot\nabla\varepsilon+\varepsilon\nabla\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}; \tag{16}$$

$$\nabla\cdot\left(\varepsilon\nabla\varphi\right)=\nabla\varphi\cdot\nabla\varepsilon+\varepsilon\nabla\cdot\nabla\varphi. \tag{17}$$

Складові частини виразів (16), (17) у декартовій системі координат можна записати у вигляді

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\cdot\nabla\varepsilon=\frac{\partial A_x}{\partial t}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial t}\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial t}\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}, \tag{18}$$

$$\nabla\varphi\cdot\nabla\varepsilon=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}. \tag{19}$$

При розрахунку електромагнітного поля у провідних та непровідних зонах пристроїв в межах одного середовища $\varepsilon = \text{const}$. У випадку анізотропних середовищ

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z} = 0\,. \tag{20}$$

Виходячи з цього, отримуємо

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \nabla\varepsilon = 0; \qquad \nabla\varphi \cdot \nabla\varepsilon = 0\,. \tag{21}$$

Якщо врахувати вирази (21) за умови (20), рівняння (14) набуде вигляду

$$\varepsilon\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla\varphi \right) = 0\,, \tag{22}$$

або

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \cdot \nabla\varphi = 0\,. \tag{23}$$

Вираз (23) справедливий у випадку використання рівнянь в потенціалах для розрахунку електромагнітного поля в середовищах, в яких відсутній просторовий нескомпенсований електричний ладунок і виконується умова (20).

Видозмінену рівність (23)

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla^2\varphi\,, \tag{24}$$

можна використовувати як ще один варіант калібрування (9), (10) при згаданих умовах. Але такий варіант не призводить до суттєвого спрощення розрахункових рівнянь.

Розглянемо умови виконання рівності (23). Другий доданок цього виразу дорівнює нулю ($\nabla \cdot \nabla\varphi = 0$) у випадках, коли $\nabla\varphi = 0$ або $\nabla\varphi = \text{const}$. Отже, існує тільки два можливі розв'язки рівняння (23) відносно функції скалярного потенціалу.

Висновки

Викладене вище дає підстави стверджувати, що калібрування $\nabla\varphi = 0$ за умови (20) є математично строгим і фізично коректним. Таке калібрування забезпечує однозначність переходу до традиційних векторів електромагнітного поля.

Другий розв'язок рівняння (23) отримуємо при калібруванні $\nabla\varphi = \text{const}$. Треба підкреслити, що спрощене рівняння (9) за цим калібруванням інтегрується до просторово-часової константи $\nabla\varphi(x, y, z, t) = \text{const}$. У випадку переходу до векторів **B**, **E** константа випадає. Отже, калібрування $\nabla\varphi = \text{const}$ також забезпечує однозначність переходу від потенціалів до векторів електромагнітного поля **H**, **E**, **B**, **D**.

Калібрування $\nabla\varphi = 0$ і $\nabla\varphi = \text{const}$ рівноцінні з точки зору інваріантності перетворень потенціалів до основних векторів, але в практичних розрахунках калібрування $\nabla\varphi = 0$ є ефективнішим, оскільки призводить до більш зручної форми рівняння (9).

Враховуючи все вище викладене, можна зробити висновок, що у більшості задач математичного моделювання електромагнітного поля пристроїв автоматики та управління допустимим є прийняття калібрування $\nabla\varphi = 0$, оскільки при цьому завжди справедливі вирази (12) і (20).

1. Лоренц Г. А. Теория электронов. – М.: Технико-теоретической литература. – 1953. – 472 с.
2. Пуанкаре А. Избранные труды. – М.: Наука. – 1974. – 770 с.

О.Лашко, Є.Ваврук
Національний університет "Львівська політехніка"

УДК 621.372:681.3

ШВИДКИЙ АЛГОРИТМ ВИКОНАННЯ КАСКАДУ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ НА ОСНОВІ СПІЛЬНОЇ БАЗОВОЇ ОПЕРАЦІЇ

Розглядається алгоритм об'єднаного виконання двох тригонометричних перетворень – оберненого дискретного косинусного перетворення другого виду та дискретного синусного перетворення четвертого виду. Доводиться ефективність алгоритму, побудованого на основі схеми перетворення з єдиною базовою операцією, що передбачає використання тангенсних множників.

In paper the algorithm of the integrated performance of two trigonometrically transformations – inverse discrete cosine transformations of the second kind and discrete sinus transformation of the fourth kind is considered. Efficiency of the algorithm constructed on the basis of the circuit of transformation with uniform base operation, which provides use tangents multipliers, is proved.

Вступ

Необхідність послідовного виконання двох тригонометричних перетворень може виникати в системах опрацювання сигналів, зокрема звуку чи зображень, при застосуванні складних методів обробки [1]. Такі методи, як правило, спрямовані на покращання або підкреслення певних характеристик сигналу. Тому важливим є зменшити затрати часу та ресурсів на їх виконання. Так, для виконання ортогонального перетворення з перекриттям (ОПП), яке забезпечує усунення "блочного ефекту" при стиску зображень, необхідно послідовно виконати обернене дискретне косинусне перетворення другого виду (ОДКП II) та дискретне синусне перетворення четвертого виду