

17. Кравець П.О. Оптимізація випадкового пошуку генетичним методом з розпаралелюванням // Інформаційні системи та мережі: Вісник НУ "Львівська політехніка". – 2002. – № 464. – С. – 158–171.

**Р.Базилевич, І. Подольський**

Національний університет "Львівська політехніка"

УДК 621.382

## ДОСЛІДЖЕННЯ АЛГОРИТМІВ ОПТИМІЗАЦІЇ ДЛЯ ЗАДАЧ ДЕКОМПОЗИЦІЇ

© Базилевич Р., Подольський І., 2003

*Для оптимізаційних задач розбиття запропоновано декілька алгоритмів, що використовують ієрархічну кластеризацію, сформовану методом оптимального згортання схеми. Досліджено ефективність алгоритмів з точки зору якості отриманих результатів та обчислювальних затрат.*

*Several algorithms for partitioning optimization are suggested. Hierarchical clustering by the Optimal Circuit Reduction method is used as a basic approach. Efficiency and effectiveness of proposed algorithms are investigated.*

### Вступ

Значна частина прикладних задач математичного моделювання мають високу та надвисоку розмірність – тисячі та мільйони невідомих. Ефективним підходом для їх якісного розв'язування є декомпозиція – розбиття схеми на підмножину окремих підсхем з подальшою їх апроксимацією макромоделями та розв'язанням основної задачі з використанням утворених макромоделей як основних елементів. Проте з математичної точки зору ця допоміжна задача також є трудомісткою, має експоненційну обчислювальну складність, що у випадку великої розмірності робить проблематичним отримання її оптимального розв'язку. Як конструктивні, так і ітераційні алгоритми декомпозиції зазвичай дають розв'язок, що відповідає деякому локальному екстремуму, часто суттєво віддаленому від оптимуму. В зв'язку з цим методологія розробки алгоритмів декомпозиції потребує подальшого вдосконалення. На відміну від традиційних запропоновані алгоритми використовують як базові елементи кластери довільної розмірності, що дає можливість покращити якість розв'язання з поміркованими обчислювальними затратами. Для формування кластерів використовується метод оптимального згортання

схеми [1]. Метод виявляє ієрархічну кластерну структуру схеми, кожний елемент якої відповідає певній групі сильно зв'язаних базових елементів схеми.

Задача декомпозиції (розбиття) крім допоміжного, має також і самостійне значення. При конструюванні складної апаратури виникає потреба її компонування в частини, які реалізуються окремими конструктивними одиницями – блоками, модулями, чіпами тощо. Такі задачі часто є багаторівневими та на відміну від попередньої допоміжної задачі мають жорсткі обмеження на певні параметри утворених частин. Кожна конструктивна одиниця зазвичай повинна задовольняти певні вимоги щодо кількості внутрішніх елементів та зовнішніх зв'язків, теплових показників, електромагнітної сумісності та інші. Порушення цих обмежень робить систему неприцездатною, а покращання основних показників забезпечує отримання досконаліших систем. Тому оптимізація основних характеристик декомпозиції стає важливою задачею проектування сучасних складних систем.

### Формулювання задачі

Широке коло реальних прикладних задач мають схемний характер, тобто можуть бути описані схемою  $S = (P, E)$ , де  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$  – множина складових елементів, та  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$  – множина зв'язків між ними. До них належать задачі схемотехнічного проектування, керування, транспортні, багато економічних задач, зокрема аналізу даних, дослідження фінансових потоків тощо. Декомпозиція схеми створює умови для переходу до макромодельовання, де окремі групи елементів описуються макромоделями з врахуванням тільки зовнішніх зв'язків та нехтуванням внутрішніх. Для складних задач однорівневе макромодельовання може виявитися недостатнім у зв'язку з великим числом утворених часткових задач, що робить необхідним використання багаторівневого модельовання. Його можна реалізувати на основі ієрархічної декомпозиції схеми. Важливим є отримання такої системи підсхем, яка задовольняє певні критерії якості та обмеження. Критеріями якості зазвичай є число зовнішніх зв'язків, які з'єднують підсхеми між собою, число утворених підсхем та інші. Ці показники необхідно мінімізувати. Обмеженнями є число виділених підсхем кожного рівня розбиття, число рівнів, числа складових елементів кожної підсхеми, числа зовнішніх зв'язків кожної підсхеми.

При однорівневому розбитті схема  $S = (P, E)$  перетворюється в систему  $\tilde{S} = (\tilde{S}, \tilde{E})$ , де  $\tilde{S} = \{S_1, \dots, S_k\}$  – окремі підсхеми, з'єднані множиною  $\tilde{S}$  зв'язків, які розглядаються як зовнішні. Множина елементів  $P$  розбивається на підмножини, що утворюють систему  $\tilde{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$ , для якої виконуються умови: кожний елемент  $p_i$  множини  $P$  входить в одну із утворених частин, об'єднання всіх елементів формує множину  $P$ , жодна із утворених частин не є порожньою, а перетин довільних двох частин є порожнім.

Метою розбиття є знаходження такої системи  $\tilde{S}^*$ , яка є оптимальною за вибраним критерієм якості  $Q$ :

$$Q(\tilde{S}^*) = \text{opt } Q(\tilde{S}),$$

де  $\tilde{S}_i$  – деяка з можливих систем розбиття, яка відповідає заданим обмеженням  $D$ .

Оскільки знаходження оптимального розв'язку є проблематичним з врахуванням реальних обчислювальних затрат (задача належить до класу  $NP$ , маючи експоненційну

складність) та розмірність реальних задач є вже надзвичайно великою, для практичних задач задовольняються розв'язком, який повинен бути наближеним до оптимального:

$$Q(\bar{S}^*) \rightarrow \text{opt } Q(\bar{S}_j).$$

На жаль, для багатьох реальних задач зі сотнями тисяч та мільйонами базових елементів важко оцінити величину відхилення отриманого розв'язку від оптимального. Оцінкою якості результату можуть хіба що бути розв'язки, отримані іншими методами.

Ефективним підходом для розв'язування даного класу задач виявився метод оптимального згортання схеми [1]. На першому етапі будується дерево оптимального згортання, яке відображає природну ієрархічну кластерну структуру схеми або наближається певною мірою до неї, оскільки формує окремі підсхеми на основі об'єднання складових елементів за певними показниками зв'язності [2]. Утворюється штучна ієрархічна кластеризація схеми. Кожну вершину дерева згортання можна розглядати як окремий кластер з певними характеристиками. Структурні характеристики утвореного дерева згортання мають властивості, обумовлені самою схемою. Підсхеми переважно утворюються з різними параметрами: кількістю внутрішніх елементів, внутрішніх та зовнішніх зв'язків та ін. Структура дерева згортання істотно залежить від вибраного критерію об'єднання елементів та кластерів. Утворені підсхеми можуть не відповідати бажаним критеріям та обмеженням. Тому виникає додаткова задача – оптимізація розв'язку, отриманого на основі дерева згортання, в процесі якої досягаються кращі значення вибраних критеріїв згідно з визначеними обмеженнями.

Особливістю розвинутого підходу є те, що для розв'язання задач на обох етапах використовується та ж сама методологія – метод оптимального згортання. Розроблено ряд алгоритмів, які вже підтвердили свою ефективність [3, 5–7]. Тим не менше ці алгоритми потребують подальшого вдосконалення. Основним недоліком оптимізаційних алгоритмів є те, що в процесі розв'язання задачі вони заходять в локальні екстремуми, для виходу з яких необхідна розробка спеціальних підходів. На основі запропонованої методології вихід з локальних екстремумів забезпечуються "збуренням" існуючого розв'язку шляхом випадкового або певним чином детермінованого перенесення окремих кластерів з однієї підсхеми в іншу, що, звичайно, призводить до погіршення значення вибраного критерію на першому кроці, проте утворює умови для продовження оптимізаційного процесу. Результатом може бути або покращання значення критерію, або його погіршення, або повернення до попереднього розв'язку з тим самим значенням критерію. Результат залежить від багатьох факторів. По-перше, це застосовані алгоритми виходу з локального екстремума, по-друге, – це віддаленість від оптимального розв'язку та по-третє – це величина "збурення". Деякі алгоритми виходу з локального екстремума на основі запропонованого підходу описані в [3, 5–7].

### Особливості ієрархічної кластеризації

Для дослідження алгоритмів розбиття розроблено експериментальний пакет програм "Декомпозиція". Запропоновані алгоритми вивчалися на відомих з літератури тестах [4]. На цих тестах спочатку відлагоджувалося програмне та алгоритмічне забезпечення для базової процедури – ієрархічної кластеризації схеми на основі методу оптимального згортання. Досліджено ефективність алгоритмів, вивчалася поведінка

процесу згорання схем для задач великої розмірності. Проведене тестування дозволило виявити вплив критеріїв згорання на результати побудови дерева згорання. Під час експериментів було встановлено, що ефективними критеріями згорання виявилися такі пари (приведено основний та допоміжний):

$$\eta_{11} = \min(|E^{com*}| - |E^{ex*}|), \eta_{12} = \max(|E^{ccmb*}| + |E^{com*}|);$$

$$\eta_{21} = \min(|E^{ex*}| + |E^{ccmb*}|), \eta_{22} = \max(|E^{com*}|);$$

де  $E^{ex*}$  – "чисті" зовнішні зв'язки;  $E^{com*}$  – "чисті" внутрішні;  $E^{ccmb}$  – комбіновані зв'язки [2].

Ефективність згорання оцінювалась за таким показниками: кількістю виконаних кроків алгоритму (ітерацій), часом згорання та розгалуженістю ("паралельністю") дерева згорання. При належному виборі критеріїв пари елементів та кластерів об'єднуються, утворюючи кластери паралельно; коли ж критерії підібрано недостатньо вдало, згорання набуває більш послідовного характеру, що призводить до "пожадливого" формування перших кластерів та долучення "залишків" на останніх стадіях формування ієрархічної кластеризації, та в результаті формує неякісну кластерну структуру схеми. Характер дерева згорання значною мірою визначається структурою самої схеми, тому для певних схем послідовний характер згорання обумовлений саме цим чинником.

Не завжди паралельне згорання відображає природну зв'язність підсхем. Наприклад, при 100% згоранні на кожній ітерації об'єднуються всі пари, причому коли перші з них мають найкращі показники об'єднання, то кожна наступна має вже гірші. Тому доцільно використовувати не всі можливі пари для об'єднання, а згорати лише від 20% до 50% елементів (кластерів) рівня. У такому випадку зростає час роботи та кількість кроків (ітерацій) алгоритму, але це дозволить отримати розв'язок, що краще відповідає природній зв'язності елементів у схемі. Можна вибирати різні

Таблиця 1

Часові характеристики кластеризації схеми

Назва тесту	100% згорання			20% згорання		
	Кількість ітерацій	Час згорання, с	Загальний час тесту, с	Кількість ітерацій	Час згорання, с	Загальний час тесту, с
lbm01	15	5	14	90	11	32
lbm02	17	13	27	95	24	56
lbm03	15	11	26	94	15	52
lbm04	16	12	29	104	23	58
lbm05	15	17	35	93	27	70
lbm06	16	16	35	95	29	73
lbm07	17	14	47	99	30	87
lbm08	17	26	62	103	35	114
lbm09	17	20	53	100	31	102
lbm10	18	28	92	105	47	140
lbm11	19	20	65	104	36	120
lbm12	248	42	125	222	46	171
lbm13	17	33	87	105	52	159
lbm14	33	49	147	118	75	258
lbm15	19	73	191	111	104	339
lbm16	23	75	213	119	108	373
lbm17	21	93	242	115	129	430
lbm18	19	86	231	122	120	412

Таблиця 2

Результати кластеризації при згортанні з 50% відхиленням значення критерію

Назва тесту	Кількість елементів	Кількість зв'язків	Кількість виводів	Кількість пар елементів	Число ітерацій	Затрати часу, с	Затрати пам'яті, Мб
ibm01	12752	14111	50566	109183	19	8	9,2
ibm02	19601	19584	81199	343409	23	28	28,6
ibm03	23136	27401	93573	206069	19	23	19,5
ibm04	27507	31970	105859	220423	18	26	20,8
ibm05	29347	28446	126308	349676	20	37	30,5
ibm06	32498	34826	128182	321308	19	42	26,7
ibm07	45926	48117	175639	373328	22	42	31,9
ibm08	51309	50513	204890	732550	18	66	61,8
ibm09	53395	60902	222088	478777	20	47	42,3
ibm10	69429	75196	297567	707969	21	73	62,7
ibm11	70558	81454	280786	508442	23	61	45,9
ibm12	71076	77240	317760	748371	135	101	70,9
ibm13	84199	99666	357075	744500	23	93	69,8
ibm14	147605	152772	546816	1125147	31	150	99,9
ibm15	161570	186608	715823	1751474	23	242	159,4
ibm16	183484	190048	778823	1923995	25	271	162,1
ibm17	185495	189581	860036	2235716	27	371	197,9
ibm18	210613	201920	819697	2221860	25	292	179,8

параметри згортання, наприклад, згортати певний відсоток пар не від загальної кількості елементів (кластерів) рівня, що піддаються об'єднанню на певному рівні, а від діапазону значень критеріїв згортання – проводити об'єднання лише тих пар, що мають найкраще значення критерію згортання або не гірше заданого відхилення від найкращого. Часові характеристики для двох значень відсотка згортання – 20% та 100% наведено в табл. 1. Основні характеристики використаних тестів подано у табл. 2.

Проведено дослідження затрат часу для обчислень та оперативної пам'яті при відхиленні значення основного критерію згортання до 50% від найкращого. Для дослідження використовувався персональний комп'ютер AMD K6-2 400MHz/256Mb RAM. У табл. 2 показано лінійну залежність обчислювальних затрат та затрат пам'яті від розмірності задачі, що дозволяє оцінювати необхідні ресурси при розв'язуванні конкретних задач та прогнозувати час роботи програми. Графіки апроксимованих залежностей часових затрат від кількості елементів (рис.1) та від кількості початкових пар, сформованих на початку роботи алгоритма на основі зв'язків схеми (рис.2), підтверджують теоретично передбачену обчислювальну складність алгоритму, яка є близькою до лінійної.

Експериментальні дослідження підтвердили, що запропонований алгоритм ієрархічної кластеризації та розроблена програмна реалізація придатні для застосування до задач великої та надвеликої розмірності (розроблена версія – до 4 млн. базових елементів схеми). Враховуючи лінійну обчислювальну складність запропонованої реалізації, програмний пакет може використовуватись як підсистема у САПР для виді-

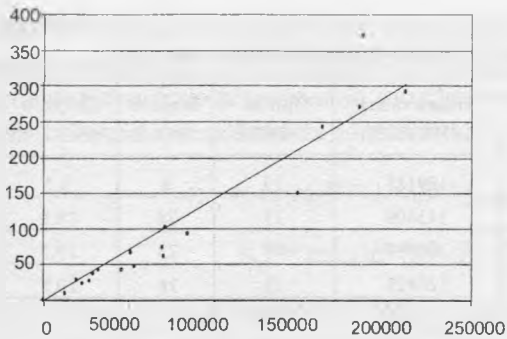


Рис. 1. Залежність часових затрат від кількості елементів

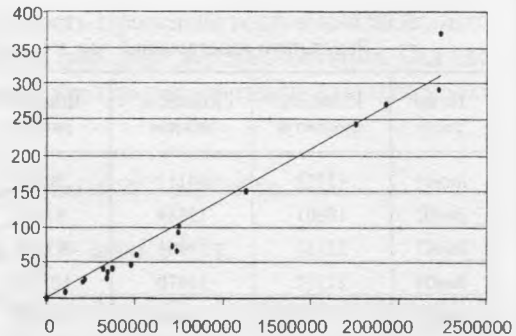


Рис. 2. Залежність часових затрат від кількості пар згортання

лення сильнозв'язаних згустків схем – кластерів. Його методологія може бути також застосована для розробки пакетів, здатних розв'язувати задачі суттєво більших розмірностей, та пакетів зі звуженими функційними можливостями, наприклад, пакетів тільки для кластеризації, тільки для однорівневого чи багаторівневого розбиття, для пакування з жорсткими обмеженнями на числа зовнішніх зв'язків та числа складових елементів, на часові, теплові чи інші характеристики.

### Дослідження алгоритмів оптимізації декомпозиції схеми

Досліджено такі алгоритми оптимізації: почергова одностороння в межах заданого відхилення від допустимого розміру частин, почергова одностороння з виходом за межі заданого відхилення від допустимого розміру частин та подальшим поверненням в ці межі, одночасна двостороння. Для кожної з цих стратегій досліджено вплив параметрів: відсотка згортання пар на кожній ітерації кластеризації; критеріїв згортання (основного та допоміжного); типу згортання (відносно діапазону критеріїв чи кількості незалежних пар на ітерації).

Дослідження проведено для 100%, 50%, 30%, 20%, 10% та 3% згортання елементів/кластерів для декількох стратегій оптимізації, причому задавались різні значення відсотка згортання схеми та критерію згортання. Початковим брався випадковий розв'язок з точним поділом схеми на дві частини за числом елементів. Розроблено ряд алгоритмів оптимізації на основі почергового групового перенесення кластерів. Досліджено такі алгоритми:

*Алгоритм I:* передбачає групове почергове одностороннє перенесення з однієї частини розбиття в іншу кластерів/елементів з від'ємним (сприятливим) та нульовим (нейтральним) значенням оцінки перенесення  $q_i$  в кількості, що не перевищує  $1/2 \Delta$  від розміру схеми. Тут  $\Delta$  – можливе відхилення від точного поділу схеми за числом елементів на дві частини, яке задається як допустиме. Завершується при умові повторення значення функції якості  $Q_j(\tilde{S}^*)$ .

*Алгоритм I.I:* на відміну від попереднього число перенесених елементів може досягати значення до  $\Delta$  від розміру схеми. При виході розмірів частин розбиття за допустимі межі, проводиться компенсація з поштучним перенесенням кластерів з більшої частини в меншу до входження розміру частини в допустимі межі. Завершується при умові повторення значення функції якості  $Q_j(\tilde{S}^*)$ .

**Алгоритм 2:** передбачає груповий одночасний двосторонній обмін кластерів/елементів з від'ємним та нульовим значенням оцінки перенесення  $q_i$  в кількості, що не перевищує  $1/2 \Delta$  від розміру схеми. Завершується при умові повторення значення функції якості  $Q(S^*)$ .

Експериментальні дослідження проводились з метою виявлення оптимальних параметрів згортання схеми та оцінки ефективності алгоритмів оптимізації. Досліджувались алгоритми 1, 1.1 та 2 для різних значень відсотка згортання від діапазону критеріїв, для двох типів критеріїв. Дослідження проводились на основі тесту *ibm01* (12572 елементи), та порівнювались з результатами роботи інших відомих алгоритмів. Початкове розбиття генерувалось випадковим чином, на основі чого було сформовано

Таблиця 3

## Результати оптимізації

Тест	Алгоритм	Процент згортання	Тип критерію	Мінімальне значення критерію	Оптимальні	$\leq 2\%$	$\leq 5\%$	$\leq 10\%$	Середнє арифметичне	Число ітерацій	Середній час оптимізації, с.
1	1	100	1	185	0	0	7	19	370	22	152
2	1	50	1	<b>180</b>	1	1	9	21	353	22	146
3	1	30	1	181	0	2	22	27	331	22	140
4	1	20	1	182	0	2	27	31	340	22	166
5	1	10	1	184	0	0	10	21	348	22	205
6	1	3	1	185	0	0	14	30	310	22	271
7	1	100	2	181	0	6	16	21	424	22	160
8	1	50	2	181	0	9	27	35	315	22	146
9	1	30	2	181	0	20	38	43	311	22	164
10	1	20	2	<b>180</b>	1	27	38	41	307	22	177
11	1	10	2	<b>180</b>	1	36	37	37	327	22	191
12	1	3	2	181	0	16	39	39	313	22	207
13	1.1	100	1	197	0	0	0	2	469	41	199
14	1.1	50	1	190	0	0	0	3	415	39	148
15	1.1	30	1	192	0	0	0	8	363	33	173
16	1.1	20	1	190	0	0	0	11	319	31	160
17	1.1	10	1	186	0	0	1	3	347	30	194
18	1.1	3	1	186	0	0	2	9	317	36	316
19	1.1	100	2	184	0	0	1	1	591	42	228
20	1.1	50	2	192	0	0	0	2	357	30	135
21	1.1	30	2	186	0	0	1	7	379	32	186
22	1.1	20	2	186	0	0	4	14	327	32	177
23	1.1	10	2	184	0	0	6	19	325	30	185
24	1.1	3	2	186	0	0	6	11	343	33	292
25	2	50	1	282	0	0	0	0	662	11	186
26	2	20	1	291	0	0	0	0	567	12	195
27	2	10	1	237	0	0	0	0	565	12	179
28	2	3	1	309	0	0	0	0	586	12	246
29	2	50	2	304	0	0	0	0	690	12	202
30	2	20	2	266	0	0	0	0	608	12	219
31	2	10	2	292	0	0	0	0	582	12	202
32	2	3	2	243	0	0	0	0	577	12	262

100 початкових розв'язків. Усі тести проводились на одному і тому ж наборі початкових розв'язків. Початкове значення функції якості  $Q_i(S^*)$  – кількість зв'язків між схемами – знаходилось в межах 9068...9403, розмір частин був однаковий – 6376 елементів. У табл. 3 наведено результати досліджень для двох типів критеріїв та різних відсотків згортання. Вибрано алгоритми без збурень, з відхиленням від рівного розбиття схеми на дві частини на  $\Delta = 10\%$ .

Дослідження запропонованих алгоритмів та параметрів оптимізації показали, що найбільш обґрунтовано використовувати алгоритм 1, з основним критерієм  $\eta_{21}$  та допоміжним  $\eta_{22}$  при згортанні у 20–30%. Цей алгоритм є достатньо швидкодіючим та забезпечує отримання якісних результатів. Крім того, він має малі значення математичного сподівання та дисперсії. Порівняно з існуючими алгоритмами дає кращий результат і за умови, що користувача задовольняє отримання розв'язку з відхиленням від найкращого в межах 2–5%, алгоритм дає високий процент потрапляння в такий окіл. Отриманий результат є достатньо ефективним для подальшого використання розроблених алгоритмів оптимізації при проектуванні реальної апаратури. Алгоритми 1.1 та 2 виявились менш ефективними. Тим не менше, вони потребують подальшого вдосконалення та дослідження, маючи певні позитивні особливості, наприклад, реалізують пошук у ширшій області можливих розв'язків.

## Висновки

Розроблені та досліджені алгоритми можуть бути використаними для розв'язування широкого класу як основних, так і допоміжних задач кластеризації та декомпозиції. Зокрема, їх доцільно використовувати для компонування складних систем, визначення їх оптимальної декомпозиції на частини, в тому числі ієрархічної, пакування складних схем в конструктиви зі заданими обмеженнями, транспортних задач, аналізу даних, зокрема фінансових потоків та інших. Підтвердивши свою ефективність, алгоритми потребують подальшого розвитку та вдосконалення. Перспективною є розробка спеціальних допоміжних алгоритмів для виходу з локальних екстремумів.

1. Базилевич Р.П. Декомпозиционные и топологические методы автоматизированного конструирования электронных устройств. – Львов: Вища школа, 1981. – 168 с.
2. Bazylevych R. P., Melnyk R. A., and Rybak O. G. Circuit partitioning for FPGAs by the optimal circuit reduction method. VLSI Design, Vol. 11, No. 3, 2000, pp.237 – 248.
3. Базилевич Р.П. Ієрархічна кластеризація, декомпозиція та багаторівневе макромодельовання – ефективні засоби розв'язування комбінаторних задач схемного типу великої та надвеликої розмірності // Збірник наукових праць "Сучасні проблеми в комп'ютерних науках". – Держ. ун-т "Львівська політехніка", 2000. – С.15–30.
4. C. J. Alpert, "The ISPD-98 Circuit Benchmark Suit," in Proc. ACM/IEEE Intern. Symposium on Physical Design, April 1998, pp.80-85.
5. Базилевич Р.П., Подольський І.В.. Ієрархічна кластеризація складних схем // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка", № 392, Львів, 2000 р., с. 155–158.
6. Базилевич Р., Подольський І. Алгоритмічна реалізація конструктивного розбиття схем // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". – 2002. – № 450. – С. 170–174.
7. Базилевич Р.П., Подольський І.В. Ієрархічна кластеризація складних схем: застосування та шляхи реалізації. // Вісник Наук.-техн. ун-ту України "КП". – К., 2003. – Вип. 40. – С. 31 – 38.