

руху куль. Отримані аналітичні залежності уможливають проведення кількісного аналізу з метою вибору раціональних конструктивних, кінематичних параметрів подрібнювачів, що мають конічні робочі поверхні.

1. Силенок С.Г. *Механическое оборудование предприятий строительной индустрии*. – М.: Стройиздат, 1973. – 374 с. 2. *Конструкция и расчет машин химических производств* / Под. ред. Э.Э. Колиана-Иванова. – М.: Машиностроение, 1985. – 408 с. 3. Малащенко В.О., Малащенко В.В., Куновский Г.П., Кравець І.Є. Силова взаємодія елементів кільцевокульових млинів // *Вісн. Нац. ун-ту "Львівська політехніка"*. – 2004. – № 526. – С. 33–36.

УДК 517.9+534.111

А.М. Сліпчук

Національний університет "Львівська політехніка",  
кафедра теоретичної механіки

## ВПЛИВ ЗБУРЕНЬ У ТОЧКАХ ЗАКРІПЛЕННЯ НА КОЛИВАННЯ РУХОМОЇ ОДНОВИМІРНОЇ СИСТЕМИ

© Сліпчук А.М., 2005

**Отримано диференціальне рівняння, яке описує поперечні коливання в одновимірних нелінійно-пружних рухомих системах, при збурених крайових умовах. Використовуючи асимптотичний метод нелінійної механіки, аналітично досліджено вплив швидкості руху на її АЧХ.**

**Differential equalization which describes transversal vibrations in the one-measurable nonlinear-resilient mobile systems is got, at the revolted regional terms. Using the asymptotic method of nonlinear mechanics influencing of rate of movement is analytically explored on its АЧХ.**

**Актуальність проблеми.** Коливання, які зустрічаються в одновимірних системах, вивчені достатньою мірою для практичних цілей, якщо їх матеріал задовольняє лінійному або близькому до нього закону пружності [1, 2]. У різноманітних проблемах сучасної механіки пружних систем з'являється необхідність досліджувати динамічні процеси при збурених крайових умовах. Якщо ж до того такі системи рухаються з постійною чи змінною швидкостями вздовж своєї геометричної осі, то дослідження коливань таких систем, навіть для випадку лінійно-пружних властивостей матеріалу, пов'язано зі значними математичними труднощами. Такі задачі, без врахування збурень крайових умов, розглядалися у [3]. Проте в реально існуючих системах навіть збурення у закріпленнях того чи іншого виду може призвести до істотних як кінематичних, так і якісних змін у динамічних характеристиках процесу. Так, наприклад, поздовжній рух балки, кінці якої також можуть вібрувати, часто зустрічається на практиці [4]. Нижче, на прикладі поперечних коливань рухомої балки досліджується вплив на динаміку процесу:

- швидкості їх поздовжнього руху;
- нелінійно-пружних характеристик матеріалу балки;
- зовнішніх періодичних сил;
- малих збурюючих крайових умов.

В основу досліджень покладено принцип одночастотності коливань у нелінійних системах з багатьма ступенями вільності та розподіленими параметрами [5], асимптотичний метод побудови розв'язків деяких класів диференціальних рівнянь з частинними похідними [4].

**Постановка задачі.** Для реальних квазілінійних чи нелінійних коливних систем з розподіленими параметрами, коли не беруться до уваги збурення у крайових умовах, має зміст під час

дослідження резонансних явищ (визначення стаціонарних синхронних режимів коливання і їх стійкість, дослідження проходження через резонанс тощо). Це має сенс при дослідженні резонансних явищ (визначення стаціонарних синхронних режимів коливання і їх стійкість, дослідження проходження через резонанс тощо). Це пояснюється тим, що в реальних коливних системах в умовах резонансу підтримуються і поширюються коливання за рахунок частоти збуджуючих сил, яка збігається з власною частотою системи; інші форми (нерезонансні) власних коливань, які визначаються початковими умовами і властивостями, у реальних системах будуть швидко затухати за рахунок дисипативних сил. Тому в умовах резонансу і наявності дисипативних сил у такій системі можуть проходити одночастотні коливання у формі динамічної рівноваги, частота якої збігається із частотою вимушуючих коливань системи. Необхідно також враховувати, що під час дослідження нестаціонарних коливань, які описуються крайовими задачами, навіть при лінійних крайових умовах виникають значні математичні труднощі, оскільки відповідні диференціальні рівняння з частинними похідними (лінійні і нелінійні) містять у собі змінні по часу коефіцієнти. Оскільки здебільшого точний розв'язок цих рівнянь не вдається знайти, тоді можна використати асимптотичні методи двох параметричних сімейств часткових розв'язків, які відповідають одночастотним режимам нестаціонарних коливань. У лінійно-пружній постановці для них можна застосувати метод Фур'є і звести початкову задачу до дослідження звичайних диференціальних рівнянь або системи звичайних диференціальних рівнянь. Нижче досліджуватимемо вплив малих збуджень у крайових умовах на коливні процеси нелінійно-пружної рухомої системи (балки).

Для описання поперечних коливань за координатну вісь приймемо прямолінійну вісь  $x$  і від неї відраховуватимемо відхилення елементів балки при поперечних її коливаннях. Нехай: 1) відхилення окремих точок осі балки проходять перпендикулярно до прямолінійного, недеформованого її напрямку ( $Ox$ ), ігноруючи при цьому зміщення цих точок, паралельних до осі; 2) відхилення точок осі балки для поперечних коливань відбуваються в одній площині ("площина коливань"). За таких припущень відхилення точок осі балки при поперечних коливаннях однозначно визначаються однією функцією двох змінних – координати  $x$  і часу  $t$ , тобто  $u = u(x, t)$ .

Позначимо через  $m$  масу одиниці довжини балки. Тоді диференціальне рівняння поперечних коливань балки за таких умов має вигляд [5]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2V \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varepsilon F\left(u, \theta, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right), \quad (1)$$

де  $\alpha^4 = \frac{EI}{m}$ , а  $EI$  – жорсткість на згин ( $E$  – модуль пружності;  $I$  – момент інерції);  $\varepsilon$  – малий

додатний параметр;  $\tau = \varepsilon t$  – повільний час;  $\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nu(\tau)$  – миттєва частота зовнішньої збуджуючої

сили;  $\varepsilon F\left(u, \theta, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)$  – аналітична  $2\pi$ -періодична по  $\nu t = \theta$  функція, і визначає

мали збуджуючі (розподілені) сили. Математично вона може бути подана як

$$\begin{aligned} \varepsilon F\left(u, \theta, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right) &= \varepsilon F_1\left(u, \theta, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right) + \\ &+ \varepsilon^2 F_2\left(u, \theta, \frac{\partial u}{\partial t}, \dots\right) + \varepsilon^3 \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Вважатимемо, що ця функція може бути подана у вигляді скінченного ряду Фур'є, де коефіцієнти є цілими раціональними функціями відносно  $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ . Рівняння (1) описує поперечні переміщення нестаціонарних коливань балки з врахуванням малих збуджуючих

нелінійних сил: сили внутрішнього тертя, інерційні сили, зовнішні періодичні сили, які розподілені по всій довжині балки.

Вважатимемо, що крайові умови неавтономного типу набирають вигляду

$$M_{1j} \left( u, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=0,l} = \varepsilon \eta_j \left( \tau, \theta, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=0,l}, \quad M_{2j} \left( u, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=0,l} = \varepsilon \mu_j (\tau, \theta, u) \Big|_{x=0,l} \quad (3)$$

при  $x = j$ , де  $M_{ij}$  ( $i = 1, 2; j = 0, l$ ) – деяка лінійна однорідна функція, а права частина (3) –  $2\pi$  – періодична по  $\theta$  і розкладається в ряд по степенях малого параметра  $\varepsilon$ . Крайові умови (3) відповідають багатьом практичним випадкам закріплення кінців балки і включають в себе випадок пружного закріплення з нелінійною характеристикою і заданим зміщенням його у часі.

Нелінійне диференціальне рівняння (1) разом з чотирма слабко нелінійними крайовими умовами (3) становлять одновимірну нелінійну крайову задачу неавтономного типу за наявності в коливній системі малих збурень нестационарного характеру.

Початкові умови, які відповідають поставленій задачі, задовольняють умовам існування коливного процесу, близького до однієї із форм незбуреної системи.

**Методика дослідження.** Насамперед розглянемо розв’язок рівняння (1), коли  $\varepsilon = 0$  у разі малої швидкості руху середовища. Згідно із асимптотичними методами нелінійної механіки [4] розв’язок шукатимемо у вигляді

$$u_{0n}(x, t) = a_n X_n(x) \cos(\omega_n t + \varphi_n), \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (4)$$

де  $a_n$  – амплітудний параметр;  $\omega_n$  – власна частота;  $\varphi_n$  – довільна стала;  $X_n(x)$  – фундаментальні функції, які мають властивості ортонормованості. Для випадку головних коливань за незбурених крайових умов, які відповідають (3):

$$X(x) = \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (5)$$

Розв’язок “збуреної” крайової задачі, для випадку головного резонансу шукатимемо у вигляді асимптотичного розкладу

$$u(x, t) = a(t) X_1(x) \cos(\psi) + \varepsilon u_1(x, a, \psi, \theta). \quad (6)$$

*Нерезонансний випадок.* На відміну від лінійного випадку, у нелінійному параметри  $a$  і  $\psi$  ( $\psi = \omega t + \varphi$ ) (6) будуть змінними і залежатимуть від нелінійних періодичних сил, а також від руху середовища. Закони зміни останніх у рівнянні (6), як і в [6], задаватимемо диференціальними рівняннями:

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots; \quad (7)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots,$$

причому  $A_i(a)$  і  $B_i(a)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) – знаходяться в такий спосіб, щоб подання (7) задовольняло вихідній задачі (6) з необхідним ступенем точності.

Для першого наближення розв’язку рівняння необхідно знайти функції  $A_1(a)$ ,  $B_1(a)$  та  $u_1(x, a, \psi, \theta)$ . Диференціюванням залежності (6), врахувавши (7), отримаємо для першого наближення:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \varepsilon A_1(a) \sin \frac{k\pi}{l} x \cos \psi - \\ &- a \sin \frac{k\pi}{l} x \left( \sin \psi (\omega + \varepsilon B_1(a)) \right) + \frac{\partial u_1}{\partial \psi} (\omega + \varepsilon B_1(a)) + v \frac{\partial u_1}{\partial \theta}; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a\omega^2 \sin \frac{k\pi}{l} x \cos \psi - 2\varepsilon a A_1(a) \sin \frac{k\pi}{l} x \sin \psi - 2a B_1(a) \omega \sin \frac{k\pi}{l} x \cos \psi +$$

$$+ \varepsilon \omega^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + \nu^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} + 2\omega\nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi \partial \nu};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{k\pi}{l} a \cos \frac{k\pi}{l} x \cos \psi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial x};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 a \sin \frac{k\pi}{l} x \cos \psi + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^3 a \cos \frac{k\pi}{l} x \cos \psi + \varepsilon \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3};$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 a \sin \frac{k\pi}{l} x \cos \psi + \varepsilon \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4}.$$

Ці співвідношення дають змогу отримати вже лінійне диференціальне рівняння, яке пов'язує шукані функції  $u_j(x, a, \psi, \theta)$ ,  $A_j(a)$ ,  $B_j(a)$ .

Підставляючи розв'язок (6) і крайових умов (3) у рівняння (1), з врахуванням рівняння (8)–(10), шляхом прирівнювання (для однакових степенів) в лівій та правій частині рівняння, отримаємо крайову задачу для лінійної функції  $u_j(x, a, \psi, \theta)$ :

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} \omega^2 + 2\nu \omega \frac{\partial u_1}{\partial \psi \partial \theta} + \nu^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} + \alpha^2 \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} = 2a\omega A_1(a) \sin \frac{k\pi}{l} x \sin \psi + 2\omega a B_1(a) \sin \frac{k\pi}{l} x \cos \psi +$$

$$+ \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \nu^2 a \sin \frac{k\pi}{l} x \cos \psi + 2\left(\frac{k\pi}{l}\right) \nu a \omega \cos \frac{k\pi}{l} x \sin \psi + \bar{F}(x, a, \psi, \theta).$$

При цьому крайові умови набувають вигляду

$$M_{1j} \left( u, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=0,l} = \varepsilon \eta_{1j}^{(0)}(x, a, \psi, \theta) \Big|_{x=0,l} \quad M_{2j} \left( u, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=0,l} = \varepsilon \mu_{2j}^{(0)}(x, a, \psi, \theta) \Big|_{x=0,l},$$

де

$$\eta = \eta_j \left( \sin \frac{k\pi}{l} x, a \cos \psi, \theta \right) \Big|_{x=0,l} \quad \mu = \mu_j \left( \sin \frac{k\pi}{l} x, a \cos \psi, \theta \right) \Big|_{x=0,l}.$$

Задовольняючи крайові умови (13) представленням розв'язку у вигляді суми

$$u_1(x, a, \theta, \psi) = \mathcal{G}_1(x, a, \theta, \psi) + \xi_1(x, a, \theta, \psi),$$

де допоміжна функція  $\xi_1(x, a, \theta, \psi)$  є розв'язком рівняння  $\frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} = 0$ . За вказаного вибору

$\xi_1(x, a, \psi, \theta)$  крайові умови відносно  $\mathcal{G}_1(x, a, \psi, \theta)$  набувають вигляду

$$M_{1j} \left( \mathcal{G}, \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=j} = 0; \quad M_{2j} \left( \mathcal{G}, \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=j} = 0, \quad (j=0,l),$$

звідки можемо знайти  $\xi = \frac{1}{6} c_1 x^3 + \frac{1}{2} c_2 x^2 + c_3 x + c_4$ . При цьому коефіцієнти  $c_{1,2,3,4}$  визначаються з

крайових умов (15), зокрема для практичного випадку, коли один кінець нерухомо закріплений, а другий – вібрує і на нього діє сила. Вона набуває вигляду

$$u(x,t)\Big|_{x=0} = u_{xx}(x,t)\Big|_{x=0} = 0, \quad u(x,t)\Big|_{x=l} = Ru_x(x,t) + R_1 \sin \theta, \quad u_{xx}(x,t)\Big|_{x=l} = R_3 u_{xxx}(x,t). \quad (16)$$

Шукана функція дорівнюватиме

$$\xi = (Ru_x + R_1 \sin \theta + R_3 u_{xxx}) \frac{x^3}{3l - 2l^2} + (Ru_x + R_1 \sin \theta - R_3 u_{xxx}) \frac{(5l - 3)}{(4l^2 - 6l)} x^2 + R_3 u_{xxx} x. \quad (17)$$

Нова функція  $\mathcal{G}(x, a, \psi, \theta)$  визначається при цьому із диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}_1}{\partial \psi^2} \omega^2 + 2\nu \omega \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial \psi \partial \theta} + \nu^2 \frac{\partial^2 \mathcal{G}_1}{\partial \theta^2} + \alpha^2 \frac{\partial^4 \mathcal{G}_1}{\partial x^4} = 2a\omega A_1(a) \sin \frac{k\pi}{l} x \sin \psi + 2\omega a B_1(a) \sin \frac{k\pi}{l} x \cos \psi + \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 V^2 a \sin \frac{k\pi}{l} x \cos \psi + 2\left(\frac{k\pi}{l}\right) Va \omega \cos \frac{k\pi}{l} x \sin \psi + F^*(a, \psi, x, \theta..), \quad (18)$$

$$\text{де } F^* = F(x, a, \psi, \theta) - \frac{\partial^2 \xi}{\partial \psi^2} \omega^2 - 2\nu \omega \frac{\partial^2 \xi}{\partial \psi \partial \theta} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} \nu^2.$$

Отже, функція  $\mathcal{G}(x, a, \psi, \theta)$  визначається із лінійного неоднорідного рівняння (18) і однорідних крайових умов. Цю функцію шукатимемо у вигляді ряду

$$\mathcal{G}(x, a, \psi, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n(a, \psi, \theta) X_n(x). \quad (19)$$

Для однозначного визначення невідомих функцій  $A_1(a)$  і  $B_1(a)$  накладемо на  $u_1(x, a, \psi, \theta)$ , як і в [5], додаткову умову – умову відсутності у її розкладі доданків, пропорційних до  $\sin \frac{k\pi}{l} x \cos \psi$  і  $\sin \frac{k\pi}{l} x \sin \psi$ . Це уможливить отримати вирази для функції, які визначають закон зміни амплітуди і фази у вигляді

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon \frac{1}{p} \frac{1}{4\omega\pi^2} \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F^*(a, x, \psi, \theta) \sin \frac{\pi}{l} x \sin \psi \, dx \, d\psi \, d\theta; \quad (20)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega - \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 V^2 + \varepsilon \frac{1}{p} \frac{1}{4\omega\pi^2 a} \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F^*(a, x, \psi, \theta) \sin \frac{\pi}{l} x \cos \psi \, dx \, d\psi \, d\theta,$$

де

$$p = \int_0^l \sin^2 \frac{\pi}{l} x \, dx = \frac{l}{2}. \quad (21)$$

Для знаходження першого поліпшеного наближення розв'язку, тобто знаходження функції  $u_1(x, a, \psi, \theta)$ , подаючи її у вигляді рядів Фур'є. Комплексно-експоненційна форма кратного ряду Фур'є досить зручна для розрахунків. Ця форма є еквівалентна звичайній формі розкладу по синусу та косинусу, так що умови збіжності будуть такі самі.

Отже, у нерезонансному випадку АФХ коливної системи залежатиме від швидкості руху, величини гармонійної сили, яка діє на балку, та амплітуди  $a$ .

*Резонансний випадок.* Тепер розглянемо таку саму систему, тільки для головного резонансного випадку ( $\omega = \nu$ ). Як і в нерезонансному випадку, розв'язок можна шукати у вигляді (6). На відміну від нерезонансного випадку у резонансному АЧХ-процесу істотно залежить від

різниці фаз власних і вимушених коливань. Тому подамо  $\frac{d\varphi}{dt}$  і  $\frac{da}{dt}$  як функції не тільки від  $a$ , а і від  $\varphi = \psi - \theta$ , тобто

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a, \varphi) + \varepsilon^2 A_2(a, \varphi) + \dots; \quad (22)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega - \nu + \varepsilon B_1(a, \varphi) + \varepsilon^2 B_2(a, \varphi) + \dots$$

Задача у першому наближенні полягає у визначенні  $A_1(a, \varphi)$ ,  $B_1(a, \varphi)$  та  $u_1(x, a, \psi, \theta)$ . Для цього продиференціюємо (6) з врахуванням вищевказаного:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \varepsilon A_1(a, \varphi) \sin \frac{k\pi}{l} x \cos \psi - a \sin \frac{k\pi}{l} x (\sin \psi (\omega - \nu + \varepsilon B_1(a, \varphi))) + \\ &+ \frac{\partial u_1}{\partial \psi} (\omega - \nu + \varepsilon B_1(a, \varphi)) + \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \nu; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \left( \varepsilon \nu \frac{\partial A(a, \varphi)}{\partial \varphi} - a (\omega + \varepsilon B_1(a, \varphi))^2 \right) \sin \frac{k\pi}{l} x \cos \psi - \\ &- \left( a \varepsilon \frac{\partial B_1(a, \varphi)}{\partial \varphi} (\omega - \nu) + \varepsilon A_1(a, \varphi) (\omega - \nu + \varepsilon B_1(a, \varphi)) \right) \sin \frac{k\pi}{l} x \sin \psi + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} \nu^2 + 2\omega \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi \partial \nu}. \end{aligned} \quad (24)$$

Отже, прирівнюючи коефіцієнти при  $\varepsilon$ , отримаємо крайову задачу для  $u_1(x, a, \psi, \theta)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} \omega^2 + 2 \frac{\partial u_1}{\partial \psi \partial \theta} \nu \omega + \nu^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} + \alpha^2 \left( \frac{k\pi}{l} \right)^4 \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} &= a V^2 \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{k\pi}{l} \cos \psi - \\ - 2V \frac{k\pi}{l} \cos \frac{k\pi}{l} \cos \psi + F^*(x, a, \psi, \theta) + \\ + \varepsilon \sin \frac{k\pi}{l} x \left( \cos \psi \left( - \frac{\partial A(a, \varphi)}{\partial \varphi} (\omega - \nu) + 2a\omega B \right) + \sin \psi \left( a \frac{\partial B(a, \varphi)}{\partial \varphi} (\omega - \nu) + 2A\omega \right) \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Далі, використовуючи вказаний метод, знайдемо розв'язок у вигляді ряду

$$u_1(x, a, \psi, \theta) = \sum X_m(x) u_{1m}(a, \theta, \psi). \quad (26)$$

Крайові умови (13) та підставляючи заміну у (14) за такого представлення виключаються автоматично. Для випадку  $m = 1$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{G}_{11}}{\partial \psi^2} \omega^2 + 2 \frac{\partial \mathcal{G}_{11}}{\partial \psi \partial \theta} \nu \omega + \nu^2 \frac{\partial^2 \mathcal{G}_{11}}{\partial \theta^2} + \alpha^2 \left( \frac{\pi}{l} \right)^4 \frac{\partial^4 \mathcal{G}_{11}}{\partial x^4} &= a V^2 \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{k\pi}{l} \cos \psi + \\ + \frac{1}{p_0} \int_0^l F^*(a, x, \theta, \psi) X_1(x) dx + \\ + \left( \cos \psi \left( - \frac{\partial A(a, \varphi)}{\partial \varphi} (\omega - \nu) + 2a\omega B \right) + \sin \psi \left( a \frac{\partial B(a, \varphi)}{\partial \varphi} (\omega - \nu) + 2A\omega \right) \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Для випадку  $m \neq 1$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{G}_{1m}}{\partial \psi^2} \omega^2 + 2 \frac{\partial \mathcal{G}_{1m}}{\partial \psi \partial \theta} \nu \omega + \nu^2 \frac{\partial^2 \mathcal{G}_{1m}}{\partial \theta^2} + \alpha^2 \left( \frac{m\pi}{l} \right)^4 \mathcal{G}_{1m} &= a V^2 \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{m\pi}{l} \cos \psi + \\ + \frac{1}{p_0} \int_0^l F^*(a, x, \theta, \psi) X_m(x) dx. \end{aligned} \quad (28)$$

Розв'язок отриманих рівнянь шукатимемо у вигляді рядів Фур'є. Комплексно-експоненційна форма кратного ряду Фур'є досить зручна для розрахунків. Ця форма еквівалентна звичайній формі

розкладу по синусу та косинусу, так що умови збіжності будуть такі самі. Тому функцію  $\mathcal{G}_{1k}(a, \psi, \theta)$  подамо у вигляді

$$\mathcal{G}_{1k} = \sum \mathcal{G}_{1kpr}(a) e^{i(p(\varphi+\theta)+r\theta)}. \quad (29)$$

Накладаючи на функцію  $\mathcal{G}_{1k}(a, \psi, \theta)$  умови, аналогічні до нерезонансного випадку, отримаємо для випадку поголовного резонансу:

$$\begin{aligned} (\omega - \nu) \frac{\partial A(a, \varphi)}{\partial \varphi} - 2a\omega B(a, \varphi) &= \frac{1}{p} \frac{1}{2\pi^2} \sum_s e^{is\varphi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F^*(a, x, \varphi + \theta, \theta) \sin \frac{k\pi}{l} x e^{-is\varphi} \cos \psi \, dx d\theta; \\ a \frac{\partial B(a, \varphi)}{\partial \varphi} (\omega - \nu) - 2A(a, \varphi)\omega + V^2 \frac{\pi^2}{l^2} &= \\ &= \frac{1}{p} \frac{1}{2\pi^2} \sum_s e^{is\varphi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F^*(a, x, \varphi + \theta, \theta) \sin \frac{k\pi}{l} x e^{-is\varphi} \cos \psi \, dx d\theta. \end{aligned} \quad (30)$$

Отже, у резонансному випадку для першого наближення розв'язку задачі матимемо систему диференціальних задач, що зв'яже шукані функції.

**Приклад.** Розглянемо поперечні коливання рухомої балки під дією гармонічного збурення у випадку, коли матеріал її задовольняє нелінійному технічному закону пружності [5]. Диференціальне рівняння руху такої системи можна записати у вигляді

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} V^2 - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} V - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \right] + \varepsilon H \sin \nu t. \quad (31)$$

Якщо вважати, що крайові умови для рівняння (23) відповідають шарнірно закріпленим кінцям, то одночастотний коливний процес у режимі, близькому до частоти зовнішніх збурень, можна описати залежністю

$$u(x, t) = a \sin \frac{\pi}{l} x \cos(\nu t + \varphi). \quad (32)$$

Тільки параметри  $a$  і  $\varphi$  для вказаного випадку визначаються системою диференціальних рівнянь:

– для нерезонансного випадку

$$\frac{da}{dt} = 0 \quad (33)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega - \varepsilon \left( \frac{9}{128} \frac{\pi^7 a^2}{\omega l^7} - \frac{IV^2}{8\omega\pi} + \frac{3}{256\omega\pi} \left( \frac{Rl^3(\pi^2 + 1) + R_2\pi^4(1+l) - \pi^2 l(R_2 + lR)}{\pi l(2l-3)} \right) \right)$$

– для резонансного випадку

$$\frac{da}{dt} = -\frac{4\varepsilon H}{\pi\alpha^2(\omega + \nu)} \cos; \quad (34)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega - \nu - \varepsilon \left( \frac{9}{128} \frac{\pi^7 a^2}{\omega l^7} - \frac{IV^2}{8\omega\pi} + \frac{3}{8\omega\pi} \left( \frac{Rl^3(\pi^2 + 1) + R_2\pi^4(1+l) - \pi^2 l(R_2 + lR)}{\pi l(2l-3)} \right) \right) + 4\varepsilon \frac{H}{\pi(\omega + \nu)\alpha^2 a} \sin \varphi.$$

Нижче, на графіку (рис. 1) зарисовані закони зміни АФХ за таких числових значень:

$l = 2$  м,  $S = 0.12 \cdot 0.085$  м<sup>2</sup>,  $\rho = 7900$  кг/м<sup>3</sup>,  $E = 2,06 \times 10^{11}$  Н/м,  $\alpha^2 = 0.64 \cdot 10^{-4}$  кг/(н·м<sup>3</sup>),  $\varepsilon H = 4 \cdot 10^{-6}$  м<sup>-3</sup>,  $a = 2$  см,  $m = 80,54$  кг/м,  $I_0 = 6.1 \cdot 10^{-6}$  м<sup>4</sup>, частота збурюючої сили  $\lambda \approx \omega$ .

За таких даних власна частота балки дорівнюватиме  $\omega = 308,1$  Гц.

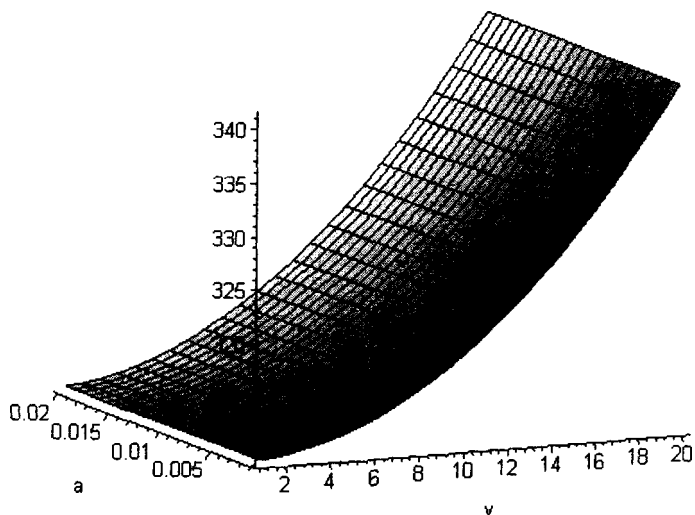


Рис. 1. Залежність частоти коливання системи від швидкості поздовжнього переміщення та зміни амплітуди коливання (для нерезонансного випадку)

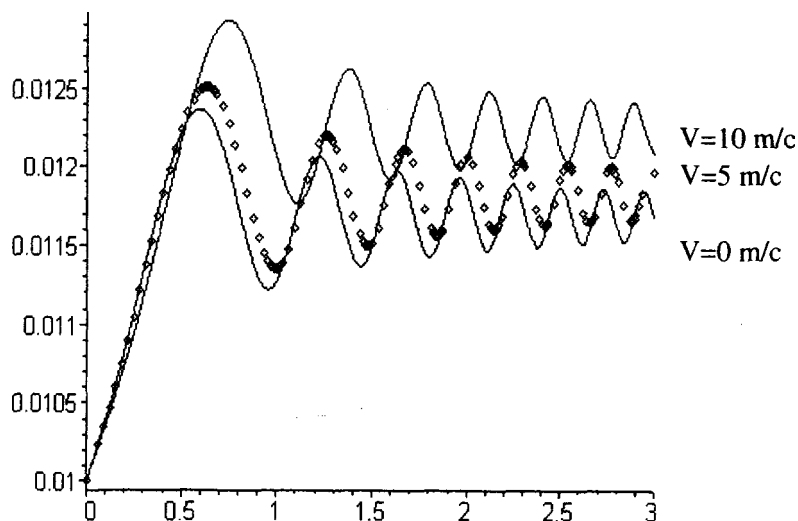


Рис. 2. Залежності амплітуди коливань системи від часу для різних швидкостей ( $V = 0$ ;  $V = 5$  м/с;  $V = 7$  м/с)

Як і потрібно було очікувати, частота коливань системи зменшується за збільшення швидкості (рис. 1), а вплив амплітуди на зміну частоти є незначним. На рис. 2 можна побачити, як впливає швидкість на зміну амплітуди: під час зростання швидкості до 7 м/с амплітуда також зростає на 10 %.

1. Гацук П., Зорій Л. Лінійні моделі дискретно-неперервних механічних систем. – Львів: Українські технології, 1999. – 372 с. 2. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Наука, 1976. – 592 с. 3. Боженко М.В., Сліпчук А.М. Вплив поздовжнього руху на нелінійні поперечні коливання пружних одновимірних систем // Вісн. Нац. ун-ту. – 2005. – № 509. – С. 25–28. 4. Митропольский Ю.А., Моисеенко Б.Н. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – М.: Вища шк., 1974. – 592 с. 5. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 372 с.