УДК 539.3.01

О. Пономаренко, П. Ванкевич, І. Добрянський
Львівський державний аграрний університет

ВПЛИВ ДВОХ КРУГОВИХ ВКЛЮЧЕНЬ НА РОЗПОДІЛ ТЕМПЕРАТУРНИХ НАПРУЖЕНЬ В НЕСКІНЧЕННІЙ ПЛАСТИНІ ПІД ДІЄЮ ОДНОРІДНОГО ТЕПЛОВОГО ПОТОКУ

In the present paper, we consider the problem of thermal stresses in on infinite plate with two circular inclusion, which are of different materials, under uniform heat flow. The analysis is developed on the basis of the Airy's Aress function in the generalized plane stress and by applying bipolar coordinates. Here the plate is supposed to be cusulated and the boundaries are free from the traction.

Проблеми розподілу напружень в пластині, що містить кілька кругових отворів або включень, під сталим температурним градієнтом є важливими при розгляді заклепкових з'єднань і неоднорідних структур (залізобетон тощо).

Задачу для нескінченної пластини, яка містить круговий чи еліптичний отвір, під дією температурного градієнта розглянуто Гудьєром і Флоренсом [1]. Вони ж [2] розглянули температурні напруження в напівбезмежній пластині з ізольованим круговим отвором під однорідним тепловим потоком. Атсумі і Мураматсу [3] досліджували температурні напруження у нескінченній пластині, що містить нескінченний ряд рівних рівновіддалених отворів під дією однорідного потоку тепла.

Задача для нескінченної пластини, що містить кругове включення і піддана однорідному тепловому потоку, розглянута у [4]. У [5], [6] розглянуто задачу термопружності для напівбезмежної пластини з круговим включенням під дією однорідного теплового потоку з застосуванням біполярних координат.

Автори [7] розглядають проблему розподілу температурних напружень в нескінченній пластині з рядом кругових отворів, які заповнені круговими включеннями з іншого матеріалу і піддані однорідному тепловому потокові.

У статті подано розв'язання задачі з розподілу усталених температурних напружень в нескінченній пластині, яка містить два кругові включення з іншого матеріалу під однорідним тепловим потоком. Пластину вважають ізольованою з границями, вільними від розтягу. Аналіз виконано на базі функції напружень E_{pi} в узагальненому плоскому напруженому стані з використанням біполярних координат.

Задачу зручно сформулювати в біполярних координатах, які визначаються за допомогою перетворення:

$$z = acth(\zeta/2), (0 \le \xi \le \infty, -\pi \le \eta \le \pi), \tag{1}$$

де $z = x + iy, \zeta = \xi + i\eta$ і а — додатне і дійсне.

З (1) маємо:

$$x = Jsh\xi, y = -J\sin\eta, \tag{2}$$

де мірило перетворення $J = a/(ch\xi - \cos\eta)$.

Краї кругових отворів, які заповнені пружними включеннями з іншого матеріалу, записуємо як координатні лінії $\xi = \alpha_1$ і $\xi = -\alpha_2 (\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0)$..

Тому криві $\xi = \alpha_1$ і $\xi = -\alpha_2$ є контурами отворів з центрами в точках $(acth\alpha_1, 0)$ і $(-acth\,\alpha_2, 0)$ і радіусами $r_1 = ac\sec h\,\alpha_1$ і $r_2 = ac\sec h\alpha_2$ відповідно.

Усталений тепловий потік характеризується функцією температури $T(\xi, \eta)$, що задовольняє гармонічне рівняння:

$$\nabla^2 T = 0 \quad \left(\nabla^2 = \left(1/J^2\right)\left(\partial^2/\partial\xi^2 + \partial^2/\partial\eta^2\right)\right), \tag{3}$$

Граничні умови задачі такі:

$$y \to \pm\infty: \qquad \partial T/\partial y = \mu_0 = const, \tag{4}$$

$$\xi = \alpha_1: \ \ T = \hat{T}, \ \ \lambda_0\left(\partial T/\partial\xi\right) = \hat{\lambda}_0\left(\partial\hat{T}/\partial\xi\right), \tag{5}$$

$$\xi = -\alpha_2: T = \overline{T}, \quad \lambda_0\left(\partial T/\partial\xi\right) = \overline{\lambda}_0\left(\partial\overline{T}/\partial\xi\right), \tag{6}$$

де величини з позначеннями зверху у вигляді клину і риски стосуються включень, які розташовані з додатного і від'ємного боку осі x відповідно, μ_0 і λ_0 — градієнт температури і теплопровідність.

Враховуючи вимоги симетричності задачі і умови регулярності температурних функцій в полюсах біполярної системи координат, запишемо $T(\xi,\eta)$, $\hat{T}(\xi,\eta)$ і $\overline{T}(\xi,\eta)$ у формі ряду:

$$T = \mu_0\left\{y + a\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n sh n\xi + d_n ch n\xi\right)\sin n\eta\right\}, \tag{7}$$

$$\hat{T} = \mu_0 a\sum_{n=1}^{\infty}\hat{d}_n e^{-n\xi}\sin n\eta, \quad (\xi > 0) \tag{8}$$

$$\overline{T} = \mu_0 a\sum_{n=1}^{\infty}\overline{d}_n e^{n\xi}\sin n\eta, \quad (\xi < 0), \tag{9}$$

де b_n, d_n, $\hat{d}_n$ і $\overline{d}_n$ — невідомі коефіцієнти.

Розглянемо ряд Фур'є:

$$\operatorname{Sin}\eta/\left(ch\xi - \cos\eta\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{\mp n\xi} Sin n\eta, \tag{10}$$

І підставляючи (7), (8) і (9) в (5) і (6), отримаємо:

$$b_n = 2\left(\hat{K}_1 m^n - \overline{K}_1 m_a^n\right)/L_n, \ \ d_n = 2\left(\hat{K} m^n + \overline{K}_1 m_a^n - \overline{K}_1\hat{K}_1 m^n m_a^n\right)/L_n$$

$$\hat{d}_n = 2\hat{K}\left(\overline{K}_1 m_a^n - 1\right)/L_n, \overline{d}_n = 2\overline{K}_2\left(\hat{K} m^n - 1\right)/Ln \tag{11}$$

де $\quad L_n = 1 - \overline{K}_1\hat{K}_1 m^n m_a^n, \hat{K}_1 = \left(\hat{\lambda}_0 - \lambda_0\right)/\left(\hat{\lambda}_0 + \lambda_0\right)$

$$\overline{K}_1 = \left(\overline{\lambda}_0 - \lambda_0\right)/\left(\overline{\lambda}_0 + \lambda_0\right), \hat{K}_2 = 2\lambda_0/\left(\lambda_0 + \hat{\lambda}\right), \overline{K}_2 = 2\lambda_0/\left(\lambda_0 + \overline{\lambda}_0\right) \tag{12}$$

$m = e^{-2\alpha_1}, \qquad m_a = e^{-2\alpha_2}$

В (10) приймаємо верхні знаки для $\xi > 0$ і нижні знаки для $\xi < 0$.

Розглянемо комплексну функцію $W(\zeta) = T + iQ$, в якій дійсна величина $\operatorname{Re}\left[W(\xi)\right] = T$ є температурна функція [8]. Використовуючи функцію $W(\zeta)$, запишемо температурні зміщення:

$$u_\xi^1 + i u_\eta^1 = a\frac{sh(\zeta/2)}{sh(\zeta^*/2)}\beta_0 \int \frac{W(\zeta)d\zeta}{2sh^2(\zeta/2)} \quad \left(\zeta^* = \xi - i\eta\right) \tag{13}$$

де u_ξ^1 і u_η^1 — компоненти зміщень в напрямі осей ξ *і* η, *а* β_0 – коефіцієнт лінійного температурного розширення. Розглянувши (10), приставляючи ряди Фур'є за допомогою співвідношень:

$$sh\xi/(ch\xi-\cos\eta)=\pm\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}e^{\mp n\xi}\cos n\eta\right),$$

$$(ch\xi\cos\eta-1)/(ch\xi-\cos\eta)^2=2\sum_{n=1}^{\infty}ne^{\mp n\xi}\cos n\eta, \tag{14}$$

і підставляючи (7), (8) і (9) в (13), після деяких перетворень отримаємо:

$$u_\xi^1=J\beta_0\mu_0 a\left[\eta(ch\xi\cos\eta-1)\sum_{n=1}^{\infty}n(b_n\pm d_n)+\sum_{k=1}^{\infty}I_K(\xi)\sin k\eta\right],$$

$$u_\eta^1=J\beta_0\mu_0 a\left[\eta sh\xi\sin\eta\sum_{n=1}^{\infty}n(b_n\pm d_n)+\sum_{k=0}^{\infty}M_K(\xi)\cos k\eta\right], \tag{15}$$

$$\hat{u}_\xi^1=J\hat{\beta}_0\mu_0 a\sum_{k=1}^{\infty}\hat{I}_K(\xi)\sin k\eta,\quad \hat{u}_\eta^1=J\hat{\beta}_0\mu_0 a\sum_{k=1}^{\infty}\hat{M}_K(\xi)\cos k\eta$$

$$\bar{u}_\xi^1=J\bar{\beta}_0\mu_0 a\sum_{k=1}^{\infty}\bar{I}_K(\xi)\sin k\eta,\quad \bar{u}_\eta^1=J\bar{\beta}_0\mu_0 a\sum_{k=1}^{\infty}\bar{M}_K(\xi)\cos k\eta \tag{16}$$

в яких

$$I_1(\xi)=(b_1ch\xi+d_1sh\xi)/2-(3/2)\sum_{n=1}^{\infty}n(b_n\pm d_n)ch\xi,$$

$$I_K(\xi)=(b_Kchk\xi+d_Kshk\xi)/(k+1)+\{2/k(k^2-1)\}\left\{\sum_{n=k}^{\infty}n(b_n\pm d_n)chk\xi\pm\sum_{n=1}^{k-1}nd_ne^{\mp k\xi}\right\},\ M_0(\xi)=1. \tag{17}$$

$$M_1(\xi)=-(b_1sh\xi+d_1ch\xi)/2+(3/2)\sum_{n=1}^{\infty}n(b_n\pm d_n)sh\xi,$$

$$M_K(\xi)=-(b_Kshk\xi+d_Kchk\xi)/(k+1)+\{2/k(k^2-1)\}\left\{\sum_{n=1}^{k-1}nd_ne^{\mp k\xi}-\sum_{n=k}^{\infty}n(b_n\pm d_n)snk\xi\right\},$$

$$\hat{I}_1(\xi)=\hat{M}_1(\xi)=\hat{b}_1e^{-\xi/2},$$

$$\hat{I}_K(\xi)=\hat{M}_K(\xi)=\hat{b}_Ke^{-k\xi}/(k+1)-\{2(k^2-1)\}\sum_{n=1}^{k-1}nb_ne^{-k\xi}, \tag{18}$$

$$\bar{I}_1(\xi)=-\bar{M}_1(\xi)=\hat{b}_1e^{\xi/2},$$

$$\bar{I}_K(\xi)=-\bar{M}_K(\xi)=\bar{b}_Ke^{k\xi}/(k+1)-\{2/k(k^2-1)\}\sum_{n=1}^{k-1}n\bar{b}_ne^{k\xi},$$

У разі узагальненого плоского напруженого стану напруження визначаються за допомогою функції напружень Ері, що задовольняють бігармонічне рівняння:

$$(\partial^4/\partial\xi^4+2\partial^4/\partial\xi^2\partial\eta^2+\partial^4/\partial\eta^4-2\partial^2/\partial\xi^2+2\partial^2/\partial\eta^2+1)(\chi/J)=0. \tag{19}$$

Компоненти напружень в біполярних координатах виражаємо за допомогою формул:

$$a\sigma_\xi=\{(ch\xi-\cos\eta)\partial^2/\partial\eta^2-sh\xi\partial/\partial\xi-\sin\eta\partial/\partial\eta+ch\xi\}(\chi/J),$$

$$a\sigma_\eta=\{(ch\xi-\cos\eta)\partial^2/\partial\xi^2-sh\xi\partial/\partial\xi-\sin\eta\partial/\partial\eta+\cos\eta\}(\chi/J), \tag{20}$$

$$a\tau_{\xi\eta}=-(ch\xi-\cos\eta)\partial^2(\chi/J)\partial\xi\partial\eta.$$

Компоненти зміщень u_ξ^2 і u_η^2 в біполярних координатах визначають за допомогою таких формул:

$$Eu_\xi^2=(1/J)\{(1-\nu)\partial\chi/\partial\xi-\partial Q/\partial\eta\},Eu_\eta^2=(1/J)\{(1-\nu)\partial\chi/\partial\eta+\partial Q/\partial\xi\}, \tag{21}$$

де E і ν — модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона.

Функція зміщень Q є бігармонічною функцією і задовольняє такі співвідношення

$$\partial^2(Q/J)\partial\xi\partial\eta=(\partial^2/\partial\xi^2-\partial^2/\partial\eta^2-1)(\chi/J),$$
$$(\partial^2/\partial\xi^2-\partial^2/\partial\eta^2-1)(Q/J)=-4\partial^2(\chi/J)/\partial\xi\partial\eta. \tag{22}$$

Отже, об'єднуючи температурні компоненти зміщень, отримаємо

$$u_\xi=u_\xi^1+u_\xi^2,\quad \hat{u}_\xi=\hat{u}_\xi^1+\hat{u}_\xi^2,\quad \overline{u}_\xi=\overline{u}_\xi^1+\overline{u}_\xi^2,$$
$$u_\eta=u_\eta^1+u_\eta^2,\quad \hat{u}_\eta=\hat{u}_\eta^1+\hat{u}_\eta^2,\quad \overline{u}_\eta=\overline{u}_\eta^1+\overline{u}_\eta^2, \tag{23}$$

Граничні умови для функції напружень:

1) на нескінченності

$$\sigma_\xi=\sigma_\eta=\tau_{\xi\eta}=0 \tag{24}$$

2) на спільних границях

$$\sigma_\xi=\hat{\sigma}_\xi,\quad \tau_{\xi\eta}=\hat{\tau}_{\xi\eta},\quad u_\xi=\hat{u}_\xi,\quad u_\eta=\hat{u}_\eta,\ \text{для}\ \xi=\alpha_1,$$
$$\sigma_\xi=\overline{\sigma}_\xi,\quad \tau_{\xi\eta}=\overline{\tau}_{\xi\eta},\quad u_\xi=\overline{u}_\xi,\quad u_\eta=\overline{u}_\eta,\ \text{для}\ \xi=-\alpha_2. \tag{25}$$

Щоб забезпечити ці умови, розглянемо функції:

$$\chi/J=E\beta_0\mu_0 a\left[\chi_0/J+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(\xi)\sin n\eta\right],$$
$$\hat{\chi}/J=\hat{E}\hat{\beta}_0\mu_0 a\sum_{n=1}^{\infty}\hat{\varphi}(\xi)\sin n\eta, \tag{26}$$
$$\overline{\chi}/J=\overline{E\beta}_0\mu_0 a\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\varphi}(\xi)\sin n\eta,$$

і

$$Q/J=E\beta_0\mu_0 a\left[Q_0/J+F\cos\eta+\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(\xi)\cos n\eta\right],$$
$$\hat{Q}/J=\hat{E}\hat{\beta}_0\mu_0 a\sum_{n=1}^{\infty}\hat{\psi}_n(\xi)\cos n\eta, \tag{27}$$
$$\overline{Q}/J=\overline{E\beta}_0\mu_0 a\left[\overline{F}\cos\eta+\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\psi}_n(\xi)\cos n\eta\right],$$

де $\varphi_1(\xi)=A_1 ch2\xi+C_1 sh2\xi+D_1,$ (28)

$$\varphi_n(\xi)=A_n ch(n+1)\xi+B_n ch(n-1)\xi+C_n sh(n+1)\xi+D_n sh(n-1)\xi,$$
$$\psi_1(\xi)=-2(A_1 sh2\xi+C_1 ch2\xi), \tag{29}$$
$$\psi_n(\xi)=-2(A_n sh(n+1)\xi+B_n sh(n-1)\xi+C_n ch(n+1)\xi+D_n ch(n-1)\xi).$$

$$\chi_0/J=\begin{bmatrix} C_a\xi\sin\eta & (\text{для}\ \ \xi>0) \\ \text{або} & \\ -C_b\xi\sin\eta & (\text{для}\ \ \xi<0)\end{bmatrix}+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{n,a}(\xi)\sin n\eta \tag{30}$$

$$Q_0/J=\begin{bmatrix} 2\eta C_a\sin\eta & (\text{для}\ \ \xi>0) \\ \text{або} & \\ -2\eta C_b\sin\eta & (\text{для}\ \ \xi<0)\end{bmatrix}+\sum_{n=1}^{\infty}\psi_{n,a}(\xi)\cos n\eta \tag{31}$$

де $\varphi_{1,a}(\xi)=(1/4)(C_a+C_b)e^{\mp 2\xi},$

$$\varphi_{n,a}(\xi)=(1/2)(C_a+C_b)(e^{\mp(n+1)\xi}/(n+1)-e^{\mp(n-1)\xi}/(n-1)), \tag{32}$$

$\psi_{n,a}(\xi)=\pm 2\varphi_{n,a}(\xi).$

Функції χ_0/J і Q_0/J відображають зміщення у нескінченній пластині з двома круговими отворами. Невідомі коефіцієнти C_a і C_b повинні усунути температурну неузгодженість в нескінченній пластині, тому беремо їх як такі:

$$C_a=(1/2)\sum_{n=1}^{\infty}n(b_n+d_n),\quad C_b=(1/2)\sum_{n=1}^{\infty}n(d_n-b_n) \tag{33}$$

Умови регулярності полів напружень і зміщень в полюсах вимагають виконання таких співвідношень

$$\hat{A}_n+\hat{C}_n=0,\quad \overline{A}_n-\overline{C}_n=0,\quad \hat{B}_n+\hat{D}_n=0\cdot(n\geq 2)$$

$$\overline{B}_n-\overline{D}_n=0,\quad (n\geq 2),\quad \hat{D}_1=0, \tag{34}$$

Для виконання умов збіжності функцій χ/J і Q/J слід взяти такі значення сталих F і $\overline{F}$:

$$F=(1/2)\hat{\gamma}\{\ G_1m^{-1}-H_1m+C_a-(1/2)(C_a+C_b)m\ \}+M_0(\alpha_1)+\sum_{k=1}^{\infty}\{M_K(\alpha_1)-J_K(\alpha_1)\ \}e^{-k\alpha_1},$$

(35)

$$F-\overline{\Delta F}=(1/2)\overline{\gamma}(G_1m_a-H_1m_a^{-1}-C_b+(1/2)(C_a+C_b)m_a)-M_0(-\alpha_2)-\sum_{k=1}^{\infty}\{M_K(-\alpha_2)+J_K(-\alpha_2)\ \}e^{-k\alpha_2}$$

$\overline{\Delta}=\overline{\beta}_0/\beta_0$

Отже, задача для нескінченної пластини, що містить два кругові включення під дією однорідного теплового потоку після розгляду співвідношень (34), (35) та граничних умов (25), зводиться до розв'язування нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, які отримуємо з цих граничних умов.

1. Florence A. L, Goodier J.N. Thermal stress at spherical cavities and circular holes in uniform heat flow. J. Appl. Mech., 2. — S. 293—294 (1959). 2. Goodier J. N., Florence A. L. Thermal stresses at an insulated circular hole near the edge of an insulated plate under uniform heat flow. Quart . J. Mech. Appl. Mafh., 1/ — S. 273—282 (1963). 3. Atsumi A., Muramatsu M. Termal stress in the neighbourhood of an infinite row of holes in a plate under uniform heat flow. Trans. JSME., 28 (1962). — S. 807—812. 4. Dundurs J., Zienkiewich O. Stresses around circular inclusions due to thermal gradients with particular reference to reinforced concrete. J. Amer. Conc. Inst ., 61. — S. 1523—1532 (1964). 5. Shioya S. On the thermal stresses of a semiinfinite plate with a circular inclusion under uniform heat flow. Ing.- Archiv, 38. — S. 343—357 (1969). 6. Shioya S., Muracami H. Thermal stresses in a semi- infinite plate containing a circular inclusion. Trans. JSME, 40. — S. 1298—1308 (1974). 7. Araki S,. Shioya S., Matsuda M. On the thermal stresses of infinite plate with on infinite row of circular inclusions under unitorm heat flow. Trans. JSME., 45. — S. 1249—1257 (1979). 8. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М, 1966.