

1. Бродин И.С. Теория, принципы построения и внедрение испытательных расходо-измерительных комплексов для технического и метрологического обеспечения измерений расхода газа // Автореф. ... д-ра техн. наук. — СПб, 1992. 2. Павловский А.Н. Измерение расхода и количества жидкостей, газа и пара. — М., 1987. 3. Пістун С.П., Бродин Ю.І. Дослідження впливу замкової рідини в дзвонових установках задання об'єму газу на її точність // Методи та прилади контролю якості. 2001. — № 7. — С. 125—127. 4. Мельничук С.І. Дослідження впливу замкової рідини в установках дзвонового типу на точність відтворення об'єму газу // Методи та прилади контролю якості. — 2002, № 9. — С. 82—84. 5. Середюк О.Є. Математичне моделювання похибки від непостійності тиску в дзвонових витратомірювальних установках // Методи та прилади контролю якості. — 1998, № 2. — С. 23—27. 6. Воцинський В.С., Воцинський В.В. Спосіб компенсації виштовхувальної сили замкової рідини розділювача в робочих еталонах газу дзвонового типу // Методи та прилади контролю якості, № 9, 2002. — С. 44—45.

УДК 621.01:621-868, 621.9.048.6.06(088.8)

О. Гаврильченко, О. Ланець, Я. Шпак
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра автоматизації та комплексної механізації машинобудівної промисловості

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ВЗАЄМОДІЇ ВОДИЛА ТА ПРИТИРА ВІБРАЦІЙНОЇ ПРИТИРОЧНОЇ МАШИНИ

© Гаврильченко О., Ланець О., Шпак Я., 2004

In article exposition of decision of task of joining led to lapp in the process of work of resonance vibration lapping machine with the angular oscillations of lapping disk is given. The mathematical description of process of joining led to lapp was conducted with the use of the approximated functions of Heaviside and Dirac. The calculations were conducted with the use of number method.

Постановка проблеми. Одним з шляхів перевірки роботи та технологічних можливостей будь-якої машини є її математичне моделювання, яке дає змогу наближено спрогнозувати поведінку машини. Чим точніше буде відтворена математична модель, тим реальнішими будуть результати. Точність відтворення залежить від багатьох чинників: використовуваного математичного апарату та забезпечення, методу обчислень, можливостей комп'ютера.

Так, математичний опис роботи резонансної вібраційної притирочної машини з кутовими коливаннями притира вимагає використання функцій Хевісайда та Дірака в системах диференціальних рівнянь другого порядку. Аналітичне розв'язання таких систем диференціальних рівнянь є надзвичайно громіздким, тому необхідно використовувати числові методи розв'язання. Однак числові розв'язання, як показує практика, з використанням ідеалізованих функцій Хевісайда та Дірака дають значну похибку під час обчислень. Основною причиною цього є неспроможність застосованого методу обчислень адекватно реагувати на стрибкоподібні імпульси.

Отже, розв'язуючи числовим способом задачі з використанням функцій Хевісайда та Дірака, було експериментально виявлено, що математичні методи не можуть адекватно обробити ідеалізовані функції Хевісайда та Дірака. Результат того — неправильний розв'язок системи диференціальних рівнянь.

Аналіз останніх досліджень. Аналіз літературних джерел не виявив конкретних матеріалів, що висвітлюють розв'язання числовими способами задач миттєвого приєднання тіла, в нашому випадку водила, до коливної маси — притира. Однак з курсу математики відомо, що стрибкоподібні функції, які складно обробляти числовими методами, можна апроксимувати [1], тим самим згладити різкі перепади. Така заміна функцій в багатьох випадках дає змогу вирішити проблеми обчислень з використанням стрибкоподібних функцій. Саме цей матеріал автори застосовували для отримання коректних результатів числових розв'язань систем диференціальних рівнянь другого порядку з використанням функцій Хевісайда та Дірака.

Задачі досліджень. У статті автори постараються отримати коректний розв'язок системи диференціальних рівнянь другого порядку, що описує взаємодію водила та притира під час роботи двомасової вібраційної притирочної машини з кутовими коливаннями притира з використанням апроксимованих значень функцій Хевісайда, Дірака та здійснити порівняльний аналіз отриманого числового розв'язання з розв'язанням тієї самої задачі з використанням ідеалізованих функцій Хевісайда та Дірака.

Складання математичної моделі двомасової механічної коливної системи вібраційної притирочної машини з кутовими коливаннями притира. Механічна коливна система вібраційної притирочної машини є двомасовою, що складається з двох коливних тіл — притира 1 та реактивної маси 2, що мають моменти інерції відносно центральних осей симетрії відповідно $J_{пр}$ та J_p (рис. 1). Коливні тіла під дією вимушуючого моменту $M(t) = P \cdot r \sin \omega t$ (де P — амплітудне значення електромагнітного зусилля; r — радіус розташування електромагнітних вібробудників; ω — колова частота вимушених коливань; t — час) здійснюють антифазні кутові коливання в дорезонансному режимі з резонансним налагодженням $z = 0.94 \dots 0.98$. Притир та реактивна маса з'єднані пружною системою 4 з жорсткістю $c_{кр}$ при крученні. На систему діють дисипативні сили, для чого вводиться коефіцієнт в'язкого опору μ .

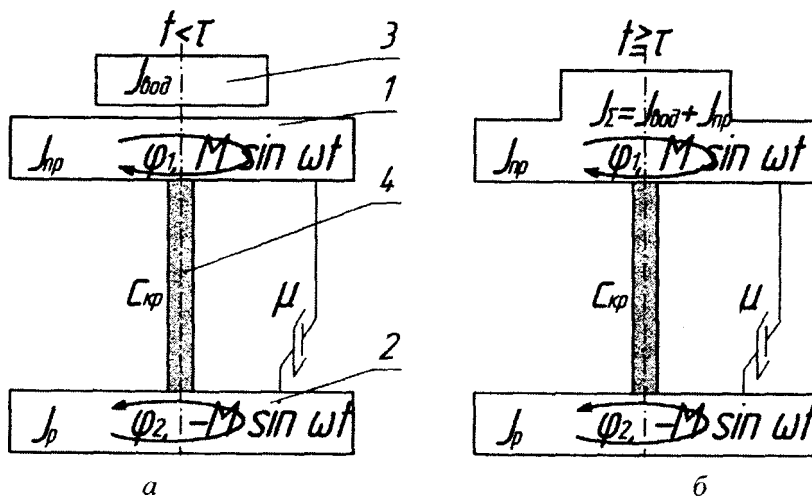


Рис. 1. Фізична модель двомасової механічної коливної системи вібраційної притирочної машини до (а) та після (б) приєднання водила, де: 1 — притир, 2 — реактивна маса, 3 — водило, 4 — пружна система, що працює на кручення

Під час роботи притирочної машини періодично здійснюється приєднання та від'єднання водила 3, що зумовлено її принципом роботи. Момент інерції водила відносно центральної осі симетрії становить $J_{вод}$. Враховуючи, що у вібр машині встановлена обгінна муфта односторонньої

дії, вважатимемо, що водило повністю приєднується до притира та від'єднується в моменти, коли притир змінює напрямок коливань (в двох крайніх положеннях руху притира).

Плюска модель двомасової вібраційної притирочної машини має два ступені вільності за узагальненими координатами: φ_1, φ_2 , де φ_1, φ_2 — відповідно кутові коливання притира та реактивної маси.

Система диференціальних рівнянь, що описує двомасову модель притирочної машини, в якій у момент τ до притира приєднується водило, матиме вигляд:

$$\begin{cases} (J_{\text{пр}} + J_{\text{вод}} \cdot \Phi(t - \tau)) \ddot{\varphi}_1 + J_{\text{вод}} \cdot \delta(t - \tau) \cdot \dot{\varphi}_1 + c_{\text{кр}} (\varphi_1 - \varphi_2) + \mu (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) = P \cdot r \sin \omega t; \\ J_p \ddot{\varphi}_2 + c_{\text{кр}} (\varphi_2 - \varphi_1) + \mu (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) = -P \cdot r \sin \omega t, \end{cases} \quad (1)$$

де $\Phi(t - \tau)$ — функція Хевісайда, тут τ — час приєднання водила; $\delta(t - \tau)$ — функція Дірака.

Наведемо числове розв'язання поставленої задачі з використанням програмного забезпечення MathCAD 2000 Professional. В математичну модель (1) були підставлені такі параметри механічної коливної системи:

$$J_p = 80 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; J_{\text{пр}} = 80 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; J_{\text{вод}} = 40 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \omega = 314 \text{ рад/с}; z = 0.96; \tau = 0.2 \text{ с};$$

$$c_{\text{кр}} = \left(\frac{J_p \cdot J_{\text{пр}}}{J_p + J_{\text{пр}}} \right) \left(\frac{\omega}{z} \right)^2 \text{ Н/м}; P = 40000 \text{ Н}; r = 0.5 \text{ м}; \mu = 2000 \text{ кг/м}.$$

Використовувалося таке описання для функцій Хевісайда та Дірака:

Функція Хевісайда:

$$\Phi(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < \tau \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Функція Дірака:

$$\text{Dirac}(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < \tau \\ 0 & \text{if } t > \tau \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

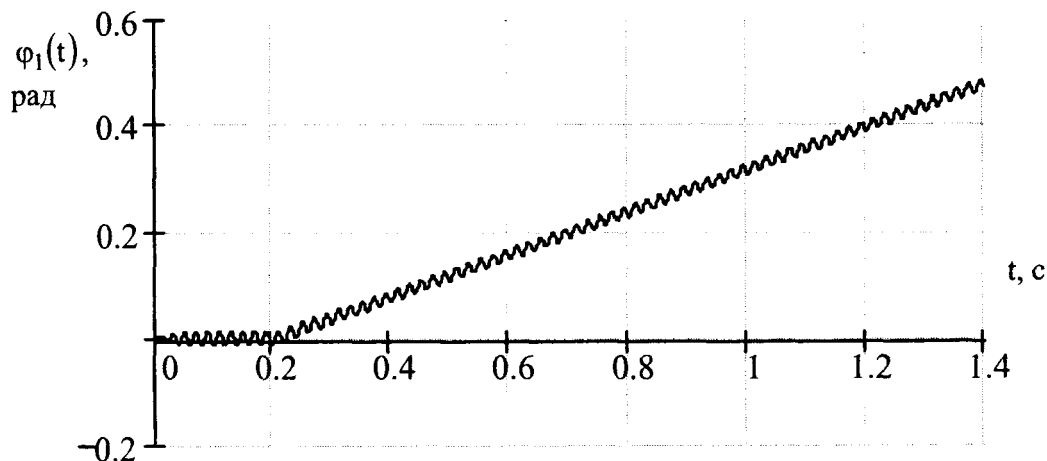


Рис. 2. Закон руху притира $\varphi_1(t)$ за узагальненою координатою в моменти до та після одиничного приєднання водила

Розв'язана задача з використанням двох функцій для розв'язання диференціальних рівнянь Rkadapt (метод Рунге—Кутта зі змінним кроком) та StiffR (метод Розенброка) [2], які дали однакові результати. Так, використовуючи функцію StiffR з такими параметрами: сумарний час коливань

$T = 1.4$ с, дискретність розбиття сумарного часу коливань $n = 1000$, закон руху притира за узагальненою координатою Φ_1 в моменти до та після одиничного приєднання водила зображено на рис. 2.

Як видно з рис. 2, використовуючи ідеалізовані функції Хевісайда та Дірака, числовий розв'язок у вигляді графіка відтворюється некоректно. Причиною цього є неспроможність використуваного числового способу адекватно обробити ідеалізовані стрибкоподібні функції.

На думку авторів, одним з шляхів, як виявилось, правильним, вирішення поставленої проблеми є заміна функцій Хевісайда та Дірака відомими апроксимованими значеннями [1]:

Функція Хевісайда:

$$\Phi(t) := \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{\pi}\right) \cdot \text{atan}[u \cdot ((t - \tau))]]$$

Функція Дірака:

$$\text{Dirac}(t) := \frac{u}{\pi \cdot [1 + (u \cdot t - u \cdot \tau)^2]}$$

де u — коефіцієнт апроксимації. Так, залежно від значення u функції Хевісайда та Дірака, якщо $\tau = 0.5$ набудуть вигляду, зображеного на рис. 3.

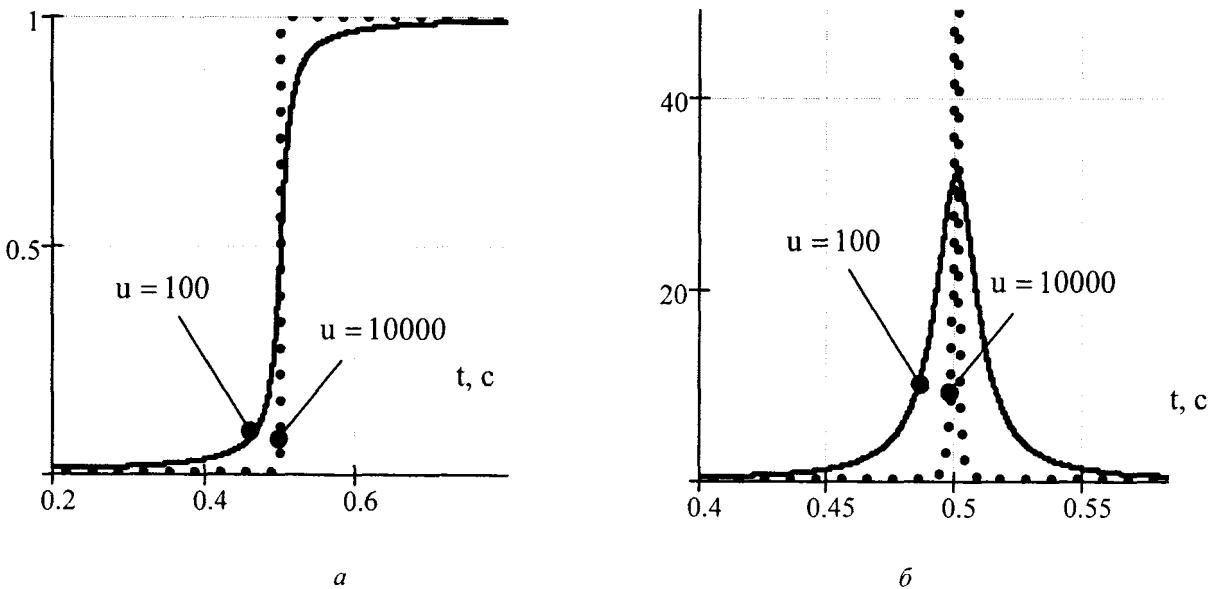


Рис. 3. Графіки апроксимованих значень функцій Хевісайда (а) та Дірака (б) залежно від коефіцієнта u

Необхідно відзначити, що згладження функцій не можна сприймати як відхід від реальних процесів, оскільки приєднання та від'єднання коливного тіла також відбувається не моментально. Тому згладження якраз і можна приймати як ділянки, на яких тіла, що зчіплюються, одне відносно другого проковзують.

Замінивши ідеалізовані функції Хевісайда та Дірака їх апроксимованими значеннями, та використовуючи ту саму функцію *Stiffz* з такими параметрами: $T = 1.4$ с, $n = 1000$ та $u = 1000$, закони

руху притира та реактивної маси за узагальненими координатами відповідно φ_1 , φ_2 в моменти до та після одиничного приєднання водила зображено на рис. 4.

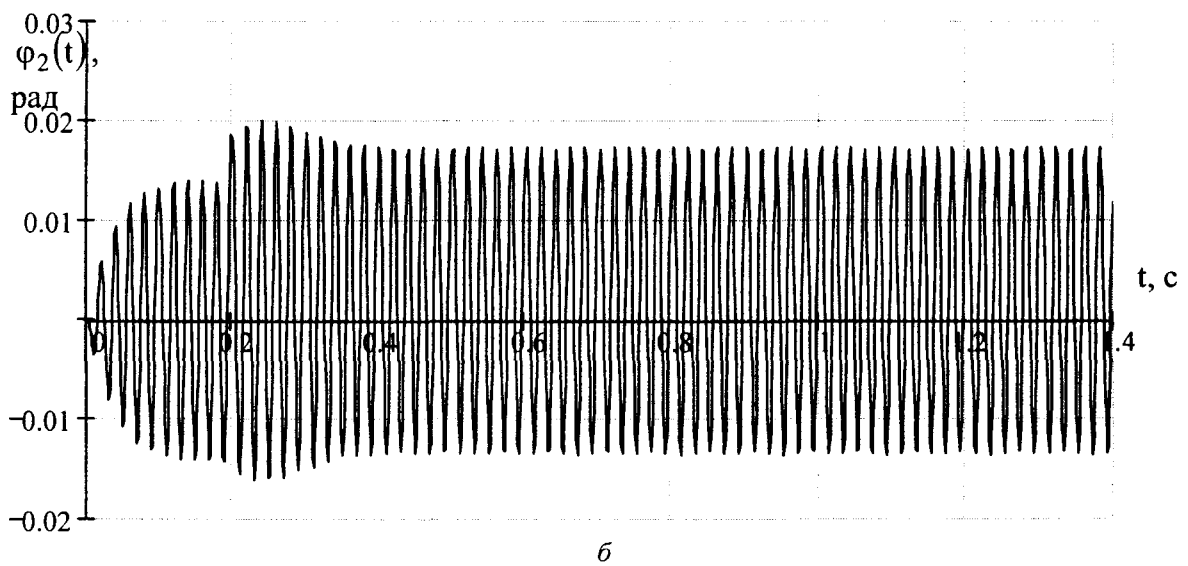
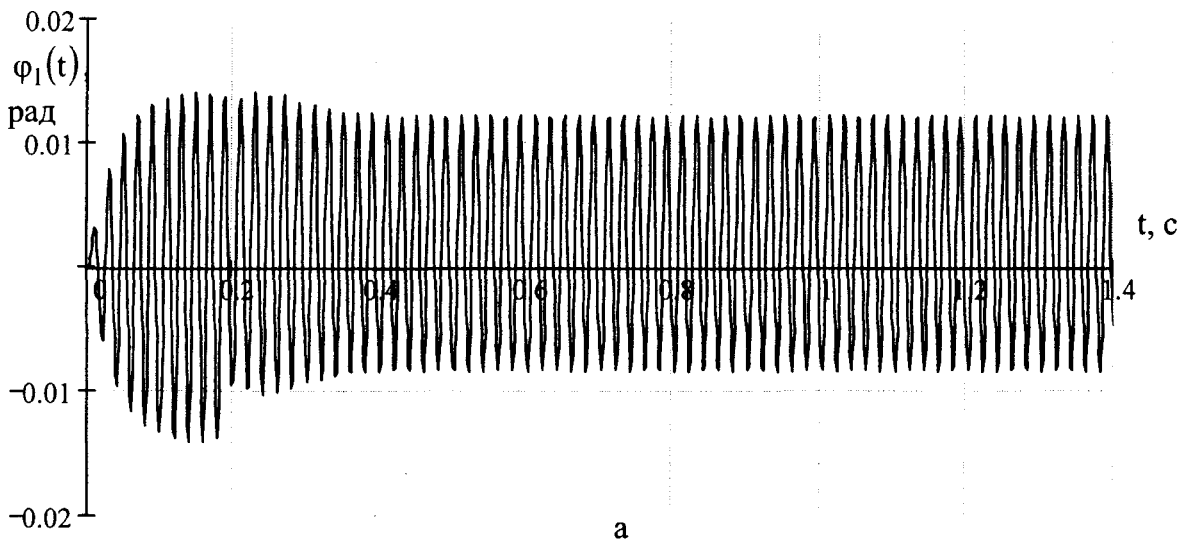


Рис. 4. Закони руху притира $\varphi_1(t)$ (а) та реактивної маси $\varphi_2(t)$ (б) за узагальненими координатами в моменти до та після одиничного приєднання водила, якщо $u = 1000$

Як видно, у такому разі числові методи адекватно реагують на апроксимовані значення стрибкоподібних функції з низьким значенням коефіцієнта апроксимації u .

Якщо розрахувати закон руху притира за узагальненою координатою $\varphi_1(t)$, якщо $u = 10000$ та $u = 100000$, графіки набудуть вигляду, зображеного на рис. 5. Некоректність відтворення результатів обчислень свідчить про те, що чим більше апроксимована функція буде наближатись до ідеалізованого значення, тим більша похибка буде при обчисленнях.

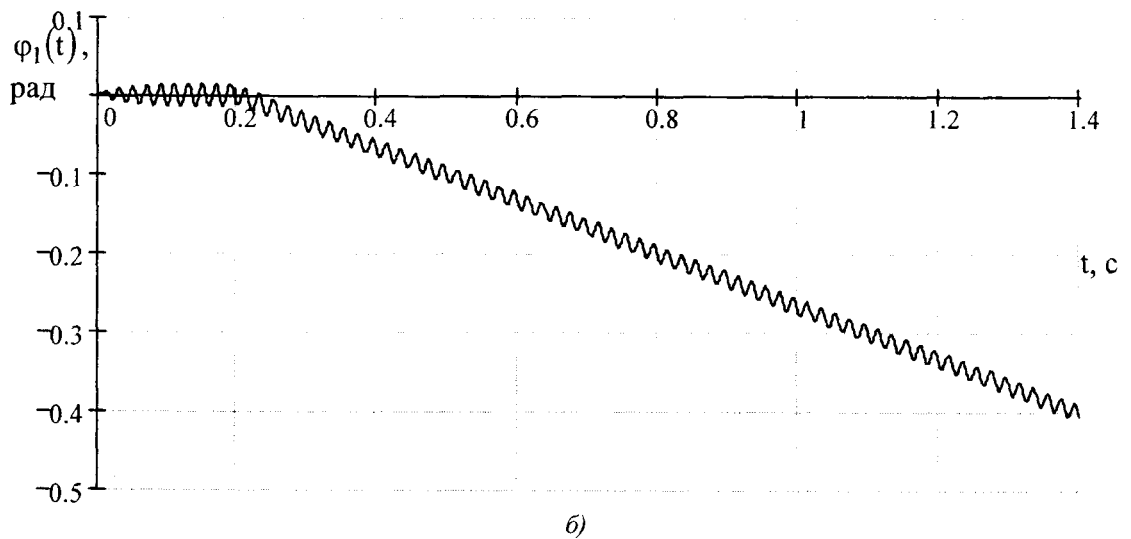
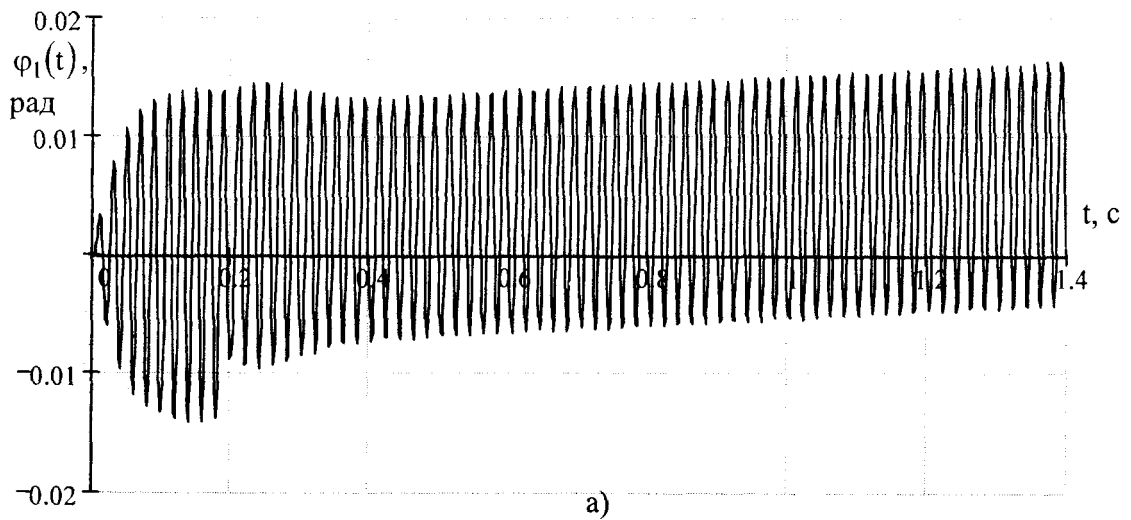


Рис. 5. Закони руху притиру за узагальненою координатою $\varphi_1(t)$ при $u = 10000$ (а) та при (б) в моменти до та після одиничного приєднання водила

Висновок. Отже, запропонований підхід до розв'язання системи диференціальних рівнянь другого порядку, що описує взаємодію водила та притира під час роботи вібраційної притирочної машини з кутовими коливаннями притира з використанням функцій Хевісайда та Дірака дає змогу математично грамотно отримати правильний результат. Це уможливило майбутнє ширше дослідження поставленої задачі.

1. Струтинський В.Б. Математичне моделювання процесів та систем механіки — Житомир: ЖІТІ, 2001. 4. Дьяконов В. MathCAD 8/2000: спеціальний справочник — СПб, 2000.