доходів домогосподарств, доходи державного бюджету та комерційних банків спочатку впали, проте вже наступного місяця почали зростати.

За умови збільшення виплат виробництва місцевому бюджету на шість (дев'ять) одиниць, зменшенні виплат державному бюджету на шість (дев'ять) одиниць та при зростанні інвестицій на 1% всі параметри будуть в кінцевому результаті спадати і поводити себе подібно до попереднього прикладу, лише довшим буде період тимчасового зростання виробництва, реалізації товарів та послуг, доходів домогосподарств, місцевого та державного бюджетів, комерційних банків. За зростання інвестицій на 1,5 – 2% всі параметри зростатимуть.

Висновки

Даний підхід дає можливість будувати складні (нелінійні) моделі окремих суб'єктів економіки, враховувати ефект запізнення дії одного фактора на інші, розглядати довільні часові інтервали, змінювати параметри стану економічної системи під час розрахунку макроекономічних показників.

1. Глушков В.М., Иванов В.В., Яценко В.М. Моделирование развивающихся систем. – М.: Наука, 1983. – 350 с.

2. Беклемищев Д.В. Имитационное макроэкономическое моделирование региона // Методы машинной имитации экономических процессов. – М.: Наука, 1982. – С. 232 – 244.

3. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. – М.: Наука, 1984. – 296 с.

4. Иванилов Ю.П., Лотов А.В. Математические модели в экономике. – М.: Наука, 1979. – 304 с.

5. Робертс Фред С. Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. – М.: Наука, 1986. – 494 с.

6. Притула М.Г., Притула Х.М. Динамічна економіко-математична модель сучасної економіки // Регіональна економіка. – 2001. – № 3. – С.47 – 56.

Е. Ушаков, О. Наталич
Вінницький інститут регіональної економіки та управління

УДК 621.55.001

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ СОКООЧИЩЕННЯ У ЦУКРОВОМУ ВИРОБНИЦТВІ

Отримано математичні моделі технологічних процесів очищення дифузійного соку з врахуванням їх взаємодії, нестаціонарних характеристик та існуючих об'єктивних обмежень на вектори вимірювань та управління.

The mathematical models of technological processes of clearing of diffusion juice are received in view of their interaction, non-stationary characteristics and existing objective restrictions on vectors of measurements and management.

Вступ

Для побудови ефективної системи контролю і управління будь-яким об'єктом потрібно насамперед знання динаміки "руху" об'єкта. Не є виключенням з даного правила і процес очищення дифузійного соку [1].

Сьогодні існує кілька видів математичних моделей, що дозволяють досліджувати динаміку реальних об'єктів у різних ситуаціях, зв'язаних зі зміною як зовнішніх, так і внутрішніх умов функціонування [4,5]. Для дослідження динаміки процесу очищення дифузійного соку застосовувалися математичні моделі, побудовані в змінних "входи-виходи" і в просторі "станів" [2,3].

Істотно відмінною рисою даного дослідження є те, що дефекосатурація розглядалася не просто як багатомірний об'єкт, а як багатостадійний технологічний процес /БТП/ очищення дифузійного соку [7].

Математична модель

У межах даного підходу представимо попередню формалізацію процесу очищення дифузійного соку як багатостадійного технологічного процесу з формулюванням постадійних цілей і задач [6]. Крім того, з огляду на практично повну аналогічність процесів 1-ої і 2-ої сатурації, обмежимося розглядом процесу очищення дифузійного соку, що містить попередню дефекацію, дефекацію і 1 сатурацію.

Вихідним пунктом є вибір узагальнених координат процесу, вхідної та вихідної змінних. Диференційне рівняння зв'язку між ними ґрунтується на законах збереження матерії та енергії, виражається в матеріальному чи енергетичному балансах $Ldx = Udt$, де L – показник ємності, що характеризує властивості об'єкта з одним ступенем свободи. Причому, якщо $L - Var$, то $Ldx = Udt$.

У загальному випадку отримуємо нелінійне диференційне рівняння, що потім лінеаризуємо і апроксимуємо рівнянням аперіодичної ланки 1-го порядку. В результаті для "каналу" зміни концентрації вапна за стадіями процесу отримаємо таку систему нелінійних диференційних рівнянь:

$$V_1 dC_1 = (F_{31}C_3 + F_{u1}C_{u1} - F_1C_1)dt;$$
$$V_2 dC_2 = (F_1C_1 + F_{u2}C_{u2} - F_2C_2)dt;$$
$$V_3 dC_3 = (F_2C_2 - F_{31}C_3 - F_3C_3)dt.$$

Для одержання апроксимуючих рівнянь аперіодичних ланок першого порядку будемо розглядати кожну стадію окремо.

1-а стадія БТП очищення дифузійного соку:

$$V_1 \frac{dC_1}{dt} = F_{31}C_3 + F_{u1}C_{u1} - F_1C_1.$$

Рівняння апроксимуючої аперіодичної ланки для першої стадії БТП очищення дифузійного соку за "каналом" зміна вмісту вапна в сокові має вигляд:

$$(T_1 p+1)\omega_1 = k_3\omega_3 + k_{u1}\omega_u + \mu_{u1}\Omega_1 + \mu_3 k_3 - \mu_1\Omega_1.$$

2-га та 3-я стадії БТП очищення дифузійного соку описуються аналогічно.

Запишемо одержані рівняння у вигляді системи

$$\begin{cases}(T_1 p+1)\omega_1 = k_3\omega_3 + k_{u1}\omega_u + \mu_{u1}\Omega_u + k_3\mu_3 - \mu_1\Omega_1;\\ (T_2 p+1)\omega_2 = k_1\omega_1 + k_{u2}\omega_u + \mu_1 b_1 + \mu_{u2}\Omega_u - \mu_2\Omega_2;\\ (T_3 p+1)\omega_3 = k_2\omega_2 + \mu_2 b_2 - \mu_3 b_3 - \mu_3.\end{cases}$$

Ця система рівнянь дозволяє моделювати динаміку формування концентрації вапна по стадіям процесу.

Подамо одержану модель у векторно-матричній формі запису. Для цього формуємо такі вектори:

$$Y = \left|U_1, U_2, U_3\right|^T; \qquad X = \left|\omega_1; \omega_2; \omega_3\right|^T.$$

Тоді рівняння зв'язку вхідних і вихідних величин для системи загалом запишеться у вигляді $Y = ZX$, де матриця Z розмірності (3×3) має вигляд:

$$Z = \begin{vmatrix} W_1^{-1} & 0 & -L_{13} \\ -L_{21} & W_2^{-1} & 0 \\ 0 & -L_{32} & W_3^{-1} \end{vmatrix}.$$

Оскільки матриця Z – не особа, то передаточна матриця системи очищення загалом буде дорівнювати $W = Z^{-1}$.

Для визначення її складу розглянемо рівняння зв'язків між u_i та ω_i. У загальному вигляді згідно з наведеною структурною схемою їх можна подати формулою:

$$U_i = W_i^{-1}\omega_i - \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} L_{ik}\omega_k.$$

Отримані рівняння описують динаміку взаємопов'язаних процесів зміни загального вмісту вапна на кожній зі стадій БТП очищення соку й загалом всього процесу як багатомірного об'єкта.

Разом з тим через значну громіздкість отриманої моделі робити розрахунки для програвання різних ситуацій виявилося дуже важко, тому на підставі даної моделі були визначені тільки постійні часу для окремих стадій.

У процесі, що розглядається в роботі, найбільш складним з погляду контролю і управління є технологічний процес на третій стадії. У зв'язку з цією обставиною докладно розглянемо динаміку зміни всіх основних параметрів на даній стадії.

Запишемо рівняння балансу у вигляді:

$$\begin{cases} V_3(t) = F_{32}(t) - F_1(t) - F_0(t); \\ \dfrac{d(C_3V_3)}{dt} = F_{32}(t)C_2(t) - F_2(t)C_3(t) - F_0(t)C_3(t); \\ \dfrac{d(V_3G_3)}{dt} = F_{32}(t) - F_1(t)G_3(t) - F_0(t)G_3(t) - F_2(t)Q(t)\eta\chi, \end{cases}$$

де прийняті такі позначення:

F_{32} – вхідний потік дефекованого соку з концентрацією вапна – C_2 і концентрацією лугу G_2;

F_2 – вхідний потік сатураційного газу з об'ємною концентрацією діоксиду вуглецю – Q, коефіцієнтом утилізації газу – η і коефіцієнтом нейтралізації лугу – χ;

V_3 – об'єм розчину в сатураторі з концентрацією вапна – C_3 і лужністю – G_3;

F_0 – миттєва витрата вихідного потоку;

F_1 – миттєва витрата потоку повернення.

Миттєві витрати вихідних потоків залежать від об'єму розчину в сатураторі так:

$$F_1(t) = k_1\sqrt{\frac{V_3(t)}{S}}; \qquad F_0(t) = k_0\sqrt{\frac{V_3(t)}{S}},$$

де k_1, k_0 – експерементальні константи, S – площа поперечного перерізу.

Зробимо віднімання рівнянь сталого режиму з попередньо лінеаризованих в околиці бажаного режиму початкових нелінійних рівнянь. Лінеаризацію виконаємо шляхом розкладання нелінійності в ряд Тейлора та відкидаючи члени розкладань вище першого порядку малості.

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = U_1 - \dfrac{k_1}{2V_0}\sqrt{\dfrac{V_0}{S}}X_1 - \dfrac{k_0}{2V_0}\sqrt{\dfrac{V_0}{S}}X_1; \\ \dot{X}_2V_0 + C_3^0\dot{X}_1 = \\ \quad = C_2^0U_1 + F_{32}^0U_2 - C_3^0\dfrac{k_1}{2V_0}\sqrt{\dfrac{V_0}{S}}X_1 - k_1\sqrt{\dfrac{V_0}{S}}X_2 - C_3^0\dfrac{k_0}{2V_0}\sqrt{\dfrac{V_0}{S}}X_1 - k_0\sqrt{\dfrac{V_0}{S}}X_2; \\ \dot{X}_3V_0 + G_3^0\dot{X}_1 = \\ \quad = G_2^0U_1 + F_{32}^0U_4 - G_3^0\dfrac{k_0}{2V_0}\sqrt{\dfrac{V_0}{S}}X_1 - k_0\sqrt{\dfrac{V_0}{S}}X_3 - G_3^0\dfrac{k_1}{2V_0}\sqrt{\dfrac{V_0}{S}}X_1 - \\ \quad - k_1\sqrt{\dfrac{V_0}{S}}X_3 - Q\eta\chi U_3. \end{cases}$$

Приведемо систему рівнянь до канонічного вигляду для чого помножимо перше рівняння лінеаризованої системи на C_3^0 і віднімимо результат із другого рівняння, віднявши з третього рівняння перше помножене на G_3^0. У результаті одержимо:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = U_1 - \dfrac{F_1^0 + F_0^0}{2V_0} X_1; \\ \dot{X}_2 = \dfrac{C_2^0 - C_3^0}{V_0} U_1 + \dfrac{F_{32}^0}{V_0} U_2 - \dfrac{F_1^0 + F_0^0}{V_0} X_2; \\ \dot{X}_3 = \dfrac{G_2^0 - G_3^0}{V_0} U_1 - \dfrac{Q\eta\chi}{V_0} U_3 + \dfrac{F_{32}^0}{V_0} U_4 - \dfrac{F_1^0 + F_0^0}{V_0} X_3. \end{cases}$$

Позначимо співвідношення $\dfrac{V_0}{F_1^0 + F_0^0} = \Theta$. Цю величину назвемо часом заповнення сатуратора.

Подамо векторно-матричну систему рівнянь в розгорнутому і згорнутому вигляді:

$$\dot{X}(t) = \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{2\Theta} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\Theta} & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{\Theta} \end{vmatrix} X(t) + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{C_2^0 - C_3^0}{V_0} & \dfrac{F_{32}^0}{V_0} & 0 & 0 \\ \dfrac{G_2^0 - G_3^0}{V_0} & 0 & -\dfrac{Q\eta\chi}{V_0} & \dfrac{F_{32}^0}{V_0} \end{vmatrix} U(t),$$

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t).$$

Доповнимо систему векторно-матричним рівнянням виміру $Y = CX$.

У результаті проведених перетворень отримана математична модель третьої стадії БТП очищення дифузійного соку у просторі станів. Визначимо аналітичне рішення. Для стаціонарних лінійних систем воно, як відомо, записується у вигляді:

$$X(t) = e^{A(t-t_0)} X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} BU(\tau) d\tau,$$

де $e^{A(t)}$ – експоненціал матриці $A(t)$, обумовлений як рішення однорідного матричного лінійного диференційного рівняння: $\dot{X} = AX$.

Разом з тим для даної системи очевидно, що власні значення матриці A є власними значеннями системи, тому експоненціал $e^{A(t)}$ є фундаментальною матрицею системи $\Phi(t)$. Запишемо її у вигляді:

$$\Phi(t)=e^{A(t)}=\begin{vmatrix} e^{-\frac{1}{2\Theta}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2\Theta}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{1}{2\Theta}} \end{vmatrix}.$$

Розрахуємо реакцію системи на одиничний східчастий вплив по U_1, U_2, U_3, U_4 у момент часу $t = 0$ за умови $X(0)=X_0$. Рішення з використанням фундаментальної матриці представляється у вигляді:

$$X(t)=\Phi(t)X(0)+\int e^{-A\tau}BU(\tau)d\tau.$$

Після визначення інтегралів з врахуванням обумовлених початкових умов остаточно маємо:

$$X(t)=\begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^{-\frac{t}{2\Theta}}X_{10}+2\Theta\left(1-e^{\frac{\tau-t}{2\Theta}}\right) \\ e^{-\frac{t}{\Theta}}X_{20}+\left(\dfrac{C_2^0-C_3^0+F_{32}^0}{V_0}\right)\Theta\left(1-e^{\frac{\tau-t}{\Theta}}\right) \\ e^{-\frac{t}{\Theta}}X_{30}+\left(\dfrac{G_2^0-G_3^0-Q\eta\chi-F_{32}^0}{V_0}\right)\Theta\left(1-e^{\frac{\tau-t}{\Theta}}\right) \end{vmatrix}.$$

Висновки

Проаналізуємо отримані результати. Завдяки застосуванню методу лінеаризації отримана порівняно проста модель, для якої вдалося знайти рішення в аналітичному вигляді, тобто ми маємо можливість порівняно малими обчислювальними витратами прорахувати реакції об'єкта при різних збурюваннях.

1. Ковальчук В. П. Динамика процесса сатурации в сахарном производстве. — // Сахарная промышленность. – 1970. – № 7. – С. 3.

2. Сапронов А.Р., Бобровник Л.Д. Сахар. – М.: Легкая и пищевая промышленность, 1981. – 256с.

3. Волошин З.С., Макаренко Л.П., Рокитский А.А., Яцковский П.В. Автоматизация свеклосахарного производства – М.: Пищевая промышленность, 1987. – 288с.

4. Воронов Г.М. Основы теории автоматического управления: особые линейные и нелинейные системы. – М.: Энергоиздат, 1981. – 304с.

5. Clarke D.W. Model following and pole-placement self-tuners. – Optim. Control applications and methods. – Vol.3, 1982. – p.323-334.

6. Рудик С.Л.. Наталич О.М. Математичні методи аналізу поведінки нелінійних систем зі змінними параметрами// Збірник наукових праць МДТУ ім.Н.Баумана. – Калуга, 2000.

7. Ушаков Е.П., Богач І.В., Наталич О.М. Математичне моделювання процесів фільтрації // Наукові праці Одеської державної академії харчових технологій. – Одеса, 2001, №3.

Я. Ковівчак
Національний університет "Львівська політехніка"

УДК 614.313

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОМАҐНЕТНОГО ПОЛЯ ЕЛЕКТРОДИНАМІЧНИХ ПРИСТРОЇВ СИСТЕМ АВТОМАТИКИ ТА КЕРУВАННЯ

Розглядається аналіз методів розрахунку електромаґнетного поля в електродинамічних пристроях систем автоматики та керування. Наведено математичне обґрунтування можливих підходів до розрахунку поля в електромеханічних виконавчих елементах. Показується, що єдино можливий спосіб моделювання електромаґнетних процесів в рухомих об'єктах – розрахунок поля у власних системах координат рухомих та нерухомих тіл. Граничні умови на лінії розділу руху знаходяться за рахунок механічного переміщення середовищ.

The paper is devoted to the analysis of computational methods of electromagnetic field of electrodynamic devices of systems of automatics and management. The mathematical substantiation of the possible approaches in calculation of electromagnetic field of electromechanical correlate effectors is given. The unique possible method of model operation of electromagnetic processes in movable objects - that calculation of the field in natural coordinate systems of movable and fixed mediums is demonstrated. The finding of boundary conditions on a boundary of a motion is carried out due to mechanical travel of mediums.

Вступ

Керування складними технологічними процесами у сучасних промислових підприємствах здійснюється за допомогою систем автоматизованого управління. Основними виконавчими елементами таких систем є електродинамічні перетворювачі різної конструкції. У цих пристроях електричний сигнал перетворюється у лінійне або кутове переміщення керуючого органу, що за відповідним алгоритмом безпосередньо керує виробничим процесом.