УДК 004.942, 004.852

П.О. Кравець
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра інформаційних систем та мереж

ІГРОВІ МЕТОДИ ВИПАДКОВОГО ПОШУКУ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Досліджено ефективність застосування адаптивних ігрових методів для пошуку об'єкта в умовах невизначеності. Вивчається вплив розмірності простору та дисперсії переміщення об'єкта на середню кількість пошукових кроків.

Efficiency of application of adaptive game methods for search of object in conditions of uncertainty is investigated. Influence of dimension of space and a dispersion of moving of object on average quantity of search steps is studied.

Вступ

Проблема випадкового пошуку є актуальною для забезпечення оптимальних режимів функціонування систем в умовах невизначеності [1–4]. Під невизначеністю будемо розуміти відсутність або недостатність інформації, необхідної для реалізації одноетапного алгоритму переведення системи на оптимальні режими роботи.

Невизначеність може бути обумовлена низкою причин, наприклад:
1) відсутністю або неточністю математичної моделі системи;
2) неконтрольованими впливами зовнішніх факторів;
3) евристичним характером алгоритму вибору варіантів рішень;
4) нескоординованістю дій учасників колективного прийняття рішень;
5) похибками реалізації керуючих дій або варіантів рішень;
6) похибками вимірювання станів та реакцій керованої системи.

Мета випадкового пошуку полягає у досягненні оптимальних значень критеріальних функцій системи за мінімальну кількість кроків.

Розв'язування ряду практичних задач базується на розпаралелюванні та адаптації випадкового пошуку на основі системи інтелектуальних агентів [5]. Методи випадкового пошуку ефективно використовують для вироблення та прийняття рішень, роботи зі сховищами даних, пошуку інформації та керування потоками даних в комп'ютерних мережах, організації розподілених та мобільних обчислень, опрацювання сигналів, побудови елементів систем штучного інтелекту та ін.

Постановка проблеми

Дослідження проблеми випадкового пошуку виконаємо на прикладі задачі переслідування динамічного об'єкта. Нехай в обмеженому m–вимірному просторі $X \subset R_+^m$ задані два переміщувані точкові об'єкти. Позиції об'єктів визначаються дискретними координатами $x = (x^i \mid i = \overline{1,m})$, а їх переміщення відбувається дискретними кроками. Один з об'єктів є переслідувачем, а інший – переслідуваним або шуканим. Переслідувач цілеспрямовано змінює свою позицію залежно від розташування шуканого об'єкта. Припустимо, що переміщення шуканого об'єкта не залежить від позиції переслідувача, є випадковим і визначається одним із законів розподілу, наприклад, нормальним. Закон переміщення шуканого об'єкта апріорі не відомий для об'єкта-переслідувача. Останній може виміряти лише поточну відстань до переслідуваного об'єкта:

$$\xi(x) = \|x - y\|, \qquad (1)$$

де $y \sim Z(m_y, d_y)$ – координата шуканого об'єкта, яка є випадковою величиною зі значеннями у просторі X, з математичним сподіванням m_y та дисперсією d_y, розподілена за законом Z. Вважаємо, що стохастичні характеристики шуканого об'єкта є апріорі невідомими.

Задача переслідувача полягає у побудові такої стратегії пошуку, яка приводить його у точку простору, в якій перебуває шуканий об'єкт:

$$\xi(x) \le r, \tag{2}$$

де $r \ge 0$ – мінімально необхідне наближення до об'єкта.

Вважатимемо, що i-та координата точки $x = (x^i \mid i = \overline{1,m})$ набуває дискретного значення із впорядкованого за зростанням числового ряду $X^i = \{x^i(1), x^i(2), ..., x^i(N_i)\}$. Тоді декартовий добуток $X = \bigotimes_{i=\overline{1,m}} X^i$ визначатиме обмежений дискретний простір можливих переміщень об'єктів.

Оскільки переміщення шуканого об'єкта є незалежним та випадковим, то для побудови пошукової стратегії переслідувача використаємо керований випадковий процес [6, 7] , який розгортається у моменти часу $n = 1, 2, ...$ та задається дискретним умовним розподілом:

$$p_n^i(j) = P\{x_n^i = x^i(j) \mid x_t^i, \xi_t^i (t = \overline{1, n-1}\}, \ j = 1,2,...,N_i. \tag{3}$$

Можливі методи керування пошуковим процесом визначаються динамікою умовного розподілу (3) у часі.

Аналіз останніх досліджень

Сучасні дослідження випадкового пошуку полягають у побудові ефективних пошукових методів з врахуванням особливостей їх практичного застосування.

Залежно від можливості зміни значень імовірностей розподілу координат пошукового процесу розрізняють такі методи випадкового пошуку [8, 9]:

1) статичні;
2) динамічні.

За статичними методами вибирають варіанти з постійними значеннями ймовірностей протягом всього часу пошуку:

$$p_n^i(j) \in [0,1] = const, \ \sum_{j=1}^{N_i} p_n^i(j) = 1, \ j = \overline{1, N_i}, \ i = \overline{1,m}$$

для всіх $n = 1,2...$.

До статичних методів належить метод рівноімовірного пошуку зі сталими значеннями ймовірностей, що дорівнюють $1/N_i$.

За динамічними методами змінюють значення ймовірностей у процесі пошуку:

$$p_n^i(j) \in [0,1] = \mathrm{var}, \ \sum_{j=1}^{N_i} p_n^i(j) = 1.$$

Залежно від можливості закріплення кращих поточних наближень до оптимального розв'язку пошукової задачі можна виділити такі класи методів [10, 11]:

1) неселективні;
2) селективні.

За неселективними методами пошуку не відбувається запам'ятовування кращого поточного розв'язку пошукової задачі, а зупиняється робота за збігу поточних координат обох об'єктів. Такі методи не є адаптивними до невизначеностей пошукового середовища.

За селективними методами запам'ятовуються поточні координати позиції активного об'єкта, у якій досягається зменшення значення його поточної відстані до шуканого об'єкта. Робота зупиняється за збігу поточних координат шуканого об'єкта із запам'ятованими координатами активного об'єкта. Такі методи покладено в основу *адаптивних стратегій пошуку*, які суттєво зменшують кількість пошукових кроків.

Імовірності вибору варіантів за селективними статичними методами задаються так само, як за неселективними. Відмінність полягає у можливості запам'ятовування кращих поточних наближень до оптимального розв'язку; за селективними статичними методами визначають кращий поточний розв'язок

$$x_n^i * = \arg\min_{t=1,n} \xi_t^i(x_t^i) \tag{4}$$

і використовують його для визначення умови зупинки (2).

Залежно від кількості пошукових агентів визначають такі методи випадкового пошуку [11, 12]:

1) індивідуальний;
2) колективний.

Методи індивідуального пошуку базуються на використанні одного пошукового агента зі стратегіями пошуку, що задаються вектором імовірностей (3) вибору пошукових варіантів. Такі методи не реалізують розпаралелювання випадкового пошуку.

Методи колективного пошуку реалізують паралельний пошук і використовують $m > 1$ пошукових агентів зі стратегіями (3) для одночасного вибору значень кожної із координат активного об'єкта.

Дискретність та скінченна кількість варіантів пошуку надають можливість *ігрового формулювання пошукової задачі* [13–15]. Тоді варіанти пошуку є чистими, а імовірності їх вибору – змішаними стратегіями. Відповідно, вищеокреслені методи можна розглядати як різновидності стохастичних ігор зі статичними та динамічними змішаними стратегіями.

Виділені методи можуть реалізовуватись в одновимірному або багатовимірному пошуковому просторі. Для одновимірного пошукового простору – це *гра з природою* (індивідуальний пошук), а для багатовимірного – *гра m осіб* (колективний пошук).

Цілі статті

У роботі розглянуто вплив розмірності пошукового простору та дисперсії його випадкових процесів на ефективність ігрових методів, яка характеризується середньою кількістю кроків, необхідних для пошуку об'єкта. Вивчення ефективності адаптивних ігрових методів виконаємо їх порівнянням з методами рівноімовірного пошуку – неселективним та селективним. Метою дослідження є знаходження методу, який за однакових початкових умов забезпечує пошук об'єкта за мінімальну кількість кроків.

Основний матеріал

1. Формулювання ігрової задачі

Сформулюємо ігрову задачу випадкового пошуку в умовах невизначеності. Для цього переміщення за кожним координатним напрямком доручимо окремому активному елементу, який надалі називатимемо гравцем. Для m–вимірного простору кількість гравців дорівнює m. Чистими стратегіями i–го гравця є набір дискретних значень координат $X^i = \{x^i(1), x^i(2), ..., x^i(N_i)\}$ за i–м координатним напрямком. Координати активного об'єкта визначаються комбінацією чистих стратегій $x \in X$ усіх гравців.

Ітераційна гра розгортається у дискретні моменти часу $n = 1,2,...$. Після незалежного випадкового вибору однієї із чистих стратегій $x_n^i = x_n^i(j)$, $j = \overline{1, N_i}$, $i = \overline{1, m}$ гравці вимірюють поточну відстань до переслідуваного об'єкта за контрольованим ними координатним напрямком

$$\xi_n^i(x_n) = \left| x_n^i - y_n^i \right|, \tag{5}$$

де y_n^i – поточне значення i–ї координати шуканого об'єкта. Значення ξ_n^i має зміст поточних втрат гравця і є випадковою величиною з невідомим законом розподілу. Отримані поточні втрати ξ_n^i використовуються кожним гравцем для подальшого вибору чистої стратегії.

Ефективність пошукової стратегії визначається функцією поточних середніх втрат i–го гравця

$$\Phi_n^i(\{x_n\}) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \xi_t^i . \qquad (6)$$

Локальною задачею кожного гравця є реалізація такої послідовності чистих стратегій, яка забезпечує мінімізацію функцій середніх втрат

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \Phi_n^i \to \min .$$

Глобальною метою гри на безмежному відрізку часу є виконання умови асимптотичної рівноваги за Слейтером:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\Phi_n^i(\{x_n\}) - \Phi_n^i(\{x_n \setminus x_n^i + \tilde{x}_n^i\})\right) < 0 ,$$

де $\Phi_n^i(\{x_n \setminus x_n^i + \tilde{x}_n^i\})$ – значення функції середніх втрат, отримане у разі заміни стратегії i-го гравця $x_n^i \in X^i$ на стратегію $\tilde{x}_n^i \in X^i$, $x_n^i \neq \tilde{x}_n^i$. Рівновага за Слейтером є частковим випадком рівноваги за Нешем [13]. Використання її як мети цієї гри обґрунтовано тим, що у випадку суміщення об'єктів втрати за всіма координатними напрямками набувають однакового мінімального, що дорівнює нулю, значення. За віддалення об'єктів відстань між ними, а отже, і поточні втрати, зростають.

На практиці зупинка гри може бути виконана при $n = n_{out}$, коли переслідувач досягає позиції переслідуваного об'єкта.

2. Ігрові адаптивні методи розв'язування задачі

Для досягнення сформульованої мети необхідно розробити методи вибору чистих стратегій. Нехай чисті стратегії вибираються з умовними імовірностями (3), значення яких залежать від передісторії зміни випадкових процесів ξ_t^i та x_t^i. Вектори p_n^i, де $i = \overline{1,m}$ визначають динамічні змішані стратегії гравців, які набувають значення на одиничних ε–симплексах:

$$S_\varepsilon^{N_i} = \left\{p^i \mid p^i \in S^{N_i}; p^i(j) \geq \varepsilon \ (j = \overline{1,N_i})\right\},\ \varepsilon \in (0, \min_i N_i^{-1}) .$$

Метод зміни елементів вектора змішаних стратегій побудуємо так, що при виборі стратегії $x_n^i(j)$ елемент $p_n^i(j)$ зменшується на значення, пропорційне величині поточного програшу ξ_n^i. Для забезпечення належності вектора p_n^i одиничному симплексу, за необхідності, виконаємо нормування його елементів. Загальне рекурентне перетворення векторів змішаних стратегій матиме вигляд:

$$p_{n+1}^i = \pi_{\varepsilon_{n+1}}^{N_i}\left\{p_n^i - \gamma_n R(p_n^i, x_n^i, \xi_n^i)\right\}, \qquad (7)$$

де $\pi_{\varepsilon_{n+1}}^{N_i}$ – проектор на одиничний симплекс, що забезпечує виконання умови $p_{n+1}^i \in S_\varepsilon^{N_i}$; γ_n – монотонно спадна послідовність невід'ємних величин, яка регулює величину кроку методу; R – крок методу; ε_n – монотонно спадна послідовність невід'ємних величин, яка регулює швидкість розширення ε-симплексу.

Для розв'язування пошукової задачі на системі одиничних симплексів необхідно забезпечити виконання умови псевдоградієнтності вектора $R(p_n^i, x_n^i, \xi_n^i)$ відносно функції Ляпунова $\Delta(p)$ [13,18]:

$$\rho_n(p^i) = \left\langle M\{R(p_n^i, x_n^i, \xi_n^i) \mid p_n^i = p^i\}, \nabla_{p^i}\Delta(p)\right\rangle \geq 0\,, \tag{8}$$

де $\langle\cdot,\cdot\rangle$–скалярний добуток векторів у евклідовому просторі; $p^i \in S_0^{N_i}$; $p \in S$; $S = \prod_{i=1}^{m} S_0^{N_i}$. Функція Ляпунова задовольняє такі умови: 1) $\Delta(p)$ – диференційована на симплексі S; 2) $\Delta(p) > 0$ для всіх точок симплексу S, крім точок оптимального розв'язку $p^* \in S$; 3) $\Delta(p^*) = 0$ у точках оптимального розв'язку. Загалом цим умовам відповідає функція

$$\Delta_n = \sum_{i=1}^{m} \Delta_n^i = \sum_{i=1}^{m} \left\| p_n^i - p^{i*} \right\|^2,$$

де p^{i*} – оптимальна стратегія i–го гравця. Інакше, умова псевдоградієнтності означає таке: для досягнення мети вектор руху методу повинен у середньому утворювати гострий кут з напрямком на оптимальний розв'язок ігрової задачі.

Умову псевдоградієнтності можна забезпечити цілим класом рекурентних методів вигляду (7). Для синтезу рекурентних методів використаємо метод стохастичної апроксимації [19]. Для цього припустимо, що математичні сподівання випадкових величин відомі $M\{\xi_n^i(x)\} = v^i(x)$ для всіх $x \in X$. Тоді функцію середніх втрат матричної гри обчислюємо так:

$$V^i(p) = \sum_{x \in X} v^i(x) \prod_{j=1}^{m} p^j(x^j)\,, \tag{9}$$

де $x^j \in x$, $i = \overline{1,m}$.

Враховуючи специфіку організації пошукового простору, яка проявляється у тому, що, згідно із (5), втрати i-го гравця не залежать від стратегій усіх інших гравців, функції (9) матимуть вигляд:

$$V^i(p^i) = \sum_{x^i \in X^i} v^i(x^i) p^i(x^i)\,. \tag{10}$$

Мета матричної гри полягає у мінімізації функцій середніх втрат (10):

$$\min_{p^i} V^i(p^i) = r\ ,\ p^i \in S_\varepsilon^{N_i}\,,\ i = \overline{1,m}\,,$$

де r – мінімальна відстань наближення до об'єкта. За точного потрапляння $r=0$.

Якщо $M\{R(p_n^i, x_n^i, \xi_n^i)\} = \nabla_{p^i} V^i(p)$, то з (8) отримаємо

$$V^i(p) - V^i(p \setminus p^i + p^{i*}) \geq 0\ , \tag{11}$$

що справедливо для всіх $p \in S$. Враховуючи, що

$$\nabla_{p^i} V^i = M\left\{ \frac{\xi_n^i}{e^{\mathrm{T}}(x_n^i) p_n^i} e(x_n^i) \middle| p_n^i = p^i \right\},$$

де $e(x_n^i)$ – одиничний вектор-індикатор вибору чистої стратегії $x_n^i \in X^i$, на основі стохастичної апроксимації отримаємо градієнтний метод розв'язування ігрової задачі [13]:

$$p_{n+1}^i = \pi_{\varepsilon_{n+1}}^{N_i}\left\{ p_n^i - \gamma_n \frac{\xi_n^i e(x_n^i)}{e^{\mathrm{T}}(x_n^i) p_n^i} \right\}. \tag{12}$$

Інший ігровий метод можна отримати на основі поелементного зважування векторної умови доповняльної нежорсткості [20]:

$$diag(p^i)[V^i e^{N_i} - \Delta V^i] = 0 \tag{13}$$

де $\Delta V^i = \left(\Delta V_j^i \mid j = \overline{1,N_i}\right)$ – векторна функція середніх втрат за фіксованих чистих стратегій i-го гравця; $V^i = \sum_{j=1}^{N_i} \Delta V_j^i p^i[j]$ – функція середніх втрат i-го гравця; $e^{N_i} = (1_j \mid j = \overline{1,N_i})$ – вектор, що складається з N_i одиниць.

Система (13), отримана розв'язуванням задачі умовної мінімізації диференційованих функцій середніх втрат $V^i(p)$ на одиничних симплексах $S_0^{N_i}$, охоплює варіанти розв'язків у чистих (для функцій (9), (10)) та змішаних стратегіях (для функції (9)).

Нехай $M\{R_n \mid p_n^i = p^i\} = diag(p^i)[V^i e^{N_i} - \Delta_{p^i} V^i]$. Тоді умова псевдоградієнтності (8) матиме вигляд

$$V^i(p)\left\|p^i - \tilde{p}^i\right\|^2 \geq 0, \tag{14}$$

де $\tilde{p}^i = \dfrac{diag(p^i)\Delta V^i}{V^i}$. Умова (14) виконується для невід'ємних середовищ ($V^i(p) \geq 0$ для всіх $p \in S$) при $p^{i*} = \tilde{p}^i$. Справедливість останнього випливає з (13).

Враховуючи, що $diag(p^i)(V^i e^{N_i} - \Delta_{p^i} V^i) = M\{\xi_n^i[p_n^i - e(x_n^i)] \mid p_n^i = p^i\}$, на основі стохастичної апроксимації отримаємо такий метод

$$p_{n+1}^i = \pi_{\varepsilon_{n+1}}^{N_i}\left\{p_n^i - \gamma_n \xi_n^i\left[e(x_n^i) - p_n^i\right]\right\}. \tag{15}$$

Умови середньоквадратичної збіжності цих методів у знакододатних середовищах (при $v^i(x) > 0$ для всіх $x \in X$, $i = \overline{1,m}$) отримано у класі монотонно спадних невід'ємних величин $\gamma_n = \gamma_0 n^{-\alpha}$, $\varepsilon_n = \varepsilon_0 n^{-\beta}$, де $\gamma_0, \alpha, \beta > 0$, $\varepsilon_0 \in (0, \min_i N_i^{-1})$.

Порядок швидкості збіжності методу (12) становить $\theta = \min(1 + \beta - \alpha, \alpha - \beta)$ за обмежень $\alpha \in (0,1]$; $0 < \beta < \alpha$. Відповідно, порядок швидкості збіжності методу (15) дорівнює $\theta = \min(1 + \beta - \alpha, \alpha)$ за обмежень $\alpha \in (0,1]$; $\beta > 0$ [21].

Максимальний порядок швидкості збіжності ігрових методів у знакододатних середовищах дорівнює: $\theta_{\max} = 0.5$ – для методу (4); $\theta_{\max} = 1$ – для методу (8) . Можливість досягнення максимального порядку визначається належним підбором початкових значень параметрів методів γ_0 та ε_0.

3. Ігровий алгоритм випадкового пошуку

Ігровий алгоритм складається з таких кроків.

Крок 1. Ініціалізація методу. Задати кількість гравців *m*, початкові значення параметрів ігрового методу $\gamma_0, \alpha, \varepsilon_0, \beta$, які задовольняють умови асимптотичної збіжності, та початкові значення векторів змішаних стратегій p_0^i, $i = \overline{1,m}$. Вектори змішаних стратегій можуть набувати довільних значень на одиничному ε-симплексі ($\varepsilon > 0$). У початковий момент часу доцільно задати $p_0^i(j) = 1/N_i$; $j = \overline{1,N_i}$; $i = \overline{1,m}$. Задати момент часу $n = 1$.

Крок 2. Вибір чистих стратегій гравців та визначення координат активного об'єкта. Для кожного гравця $i = \overline{1,m}$ згенерувати випадкове число ω, розподілене за рівномірним законом на відрізку $[0,1)$, та визначити номер *k* чистої стратегії з виконання умови

$$\min_k \sum_{j=1}^{k} p_n^i(j) \geq \omega, \quad k = \overline{1,N_i}.$$

За номером чистої стратегії визначити *i*-ту координату активного об'єкта. Якщо ширину простору за *i*-м координатним напрямком визначено у діапазоні $[a^i, b^i]$, то для рівномірного кроку $h^i = (b^i - a^i)/N_i$ значення координати визначають так: $x^i = a^i + (k-1)h^i$. Для нерівномірного кроку значення x^i прочитати з допоміжного масиву координат за індексом *i*.

Крок 3. Визначення координат переслідуваного об'єкта. Координати переслідуваного об'єкта y^i визначають як випадкові величини, розподілені за нормальним законом з математичним сподіванням m_y^i та дисперсією d_y^i. Нормально розподілені випадкові величини можна обчислити через суму дванадцяти рівномірно розподілених величин:

$$y^i = m_y^i + \sqrt{d_y^i}\left(\sum_{j=1}^{12}\omega_j - 6\right),$$

де $\omega \in [0,1)$ – випадкове число, розподілене за рівномірним законом.

Крок 4. Визначення поточних втрат гравців. Поточні втрати визначаються як відстань між об'єктами за i–м координатним напрямком:

$$\xi_n^i = \left|x^i - y^i\right|,\ i = \overline{1,m}.$$

Крок 5. Зміна регульованих параметрів алгоритму. Обчислити значення параметрів $\gamma_n = \gamma_0 n^{-\alpha}$, $\varepsilon_n = \varepsilon_0 n^{-\beta}$ у момент часу n.

Крок 6. Перерахунок елементів векторів змішаних стратегій. Нові вектори змішаних стратегій обчислюють за одним із рекурентних перетворень (12), (15), після чого виконується їх проектування на одиничний ε-симплекс, яке зводиться до ітераційного алгоритму проектування вектора на одиничну гіперплощину з подальшим зануленням його від'ємних компонентів [13].

Крок 7. Перевірка умови завершення гри. Момент закінчення гри може бути визначений за однією з таких умов:

1) за повного суміщення об'єктів, тобто $\xi_n^i = 0$ для всіх $i = \overline{1,m}$;

2) коли відстань між об'єктами є меншою від заданої величини $r > 0$, тобто $\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(\xi_n^i)^2} < r$;

3) за незначної зміни векторів змішаних стратегій за два послідовні моменти часу, тобто коли $m^{-1}\sum_{i=1}^{m}\left\|p_{n+1}^i - p_n^i\right\| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$;

4) за досягнення заданої кількості кроків, тобто якщо $n \ge n^*$.

Якщо умову не виконано, то задати $n = n + 1$ і перейти на крок 2, інакше – на крок 8.

Крок 8. Вивід координат шуканого об'єкта. Кінець.

4. Аналіз результатів комп'ютерної реалізації

Для забезпечення достовірності комп'ютерного експерименту обчислення координат активного об'єкта, для яких виконується умова завершення пошукового методу, виконано за $k=100$ реалізаціями пошукового алгоритму. Середні значення координат обчислюють так:

$$\overline{x}^i = k^{-1}\sum_{j=1}^{k} x^i(j),\ \mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{m}}.$$

Ефективність пошукових методів визначається середньою кількістю ітерацій

$$\overline{n} = k^{-1}\sum_{j=1}^{k} n(j)$$

та середньою відстанню від активного об'єкта до математичного сподівання позиції переслідуваного об'єкта на момент завершення гри (похибкою досягнення об'єкта):

$$s = \left\|\overline{x} - m_y\right\|.$$

Виконаємо дослідження впливу розмірності пошукового простору на ефективність неселективного, селективного рівноімовірних методів вибору чистих стратегій та ігрового адаптивного методу (15) із значеннями параметрів $\alpha = 0.3$, $\beta = 2$, $\gamma_0 = 1$, $\varepsilon_0 = 0.999N^{-1}$.

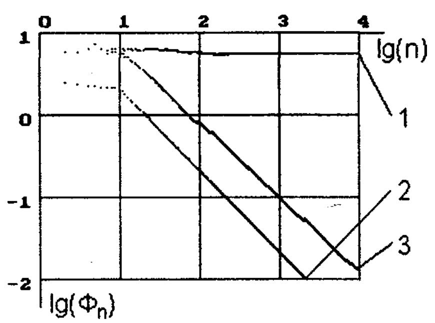
Розмірність пошукової задачі визначається кількістю вимірів m та шириною N_i $(i=\overline{1,m})$ дискретного пошукового простору. Приймемо, що $N_i = N$ для всіх $i=\overline{1,m}$.

Позицію об'єкта задають нормальним випадковим розподілом координат $y \sim \mathrm{N}(m_y, d_y)$, де $y \in R^m$. На переміщення об'єкта накладається обмеження $y \in X$. Значення математичного сподівання координат об'єкта $m_y = (m_y(j) \mid j=\overline{1,m}) = const$ отримані за допомогою генератора випадкових величин, розподілених за рівномірним законом $m_y(j) \sim Random(N_i)+1$, $j=\overline{1,m}$. Так, для $m=10$ та $N=10$ маємо $m_y = (7,1,3,1,7,8,6,6,9,7)$. Для менших значень m математичне сподівання координат шуканого об'єкта визначається першими елементами вектора m_y. Для різних експериментів дисперсія набуває одне із значень $d_y = \{0,1,10\}$.

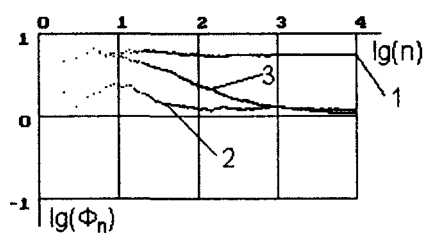
Збіжність методу визначається поведінкою функцій середніх втрат вигляду (6). Для вивчення їх спільної поведінки у часі сформуємо функцію середньої відстані між об'єктами:

$$\Phi_n = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(\xi_t^i)^2}\,. \tag{16}$$

На рис. 1 зображено графіки функції Φ_n у логарифмічному масштабі для розглянутих у роботі методів випадкового пошуку. Для дослідження поведінки функції за великих значень n умови завершення роботи пошукових методів, побудовані на основі точного збігу координат об'єктів, не враховують.



$d_y = 0$



$d_y = 1$

Рис. 1. Зміна функції середніх втрат у часі

за фіксованих значень дисперсії d_y для різних методів випадкового пошуку:

1 – неселективний метод рівноймовірного вибору варіантів;

2 – селективний метод рівноймовірного вибору варіантів;

3 – ігровий адаптивний метод

Як видно із рис. 1, випадкове переміщення шуканого об'єкта (при $d_y > 0$) призводить до сповільнення швидкості збіжності пошукових методів. Неселективний метод рівноймовірного випадкового пошуку має найменшу швидкість збіжності. Для цього методу розв'язування задачі є можливим за рахунок випадкового потрапляння обох об'єктів в одну точку пошукового простору. Для цього прикладу із трьох розглянутих методів селективний рівноймовірний пошук забезпечує розв'язування задачі за найменшу кількість кроків. Метод рівноймовірного селективного пошуку та адаптивний ігровий метод забезпечують приблизно однаковий емпіричний порядок швидкості збіжності (визначається гострим кутом нахилу лінійної апроксимації функцій середніх втрат з віссю абсцис).

Зміна функції середніх втрат у часі становить більше теоретичний, ніж практичний інтерес, оскільки розглядає поведінку методів на досить великому відрізку часу. Для практичних застосувань важливо зменшити кількість кроків пошуку. Для цього можна обмежитись виконанням однієї із умов 1–4 кроку 7 ігрового алгоритму. Нехай завершення пошуку визначається диз'юнкцією умов 1 та 3. Як показують результати моделювання, це дозволяє скоротити кількість пошукових кроків (порівняно з використанням тільки умови 1, яка визначає точне потрапляння) без втрати середньої точності локалізації об'єкта.

Результати моделювання пошукових методів при $N = 10$, дисперсії $d_y = 1$ та зростанні кількості вимірів пошукового простору наведено у табл. 1.

Таблиця 1

Вплив кількості вимірів пошукового простору на ефективність методів випадкового пошуку

Кількість вимірів пошукового простору, m	Неселективний рівноімовірний вибір варіантів		Селективний рівноімовірний вибір варіантів		Адаптивний ігровий вибір варіантів	
	Середня кількість кроків	Середня похибка	Середня кількість кроків	Середня похибка	Середня кількість кроків	Середня похибка
1	9	1	6	1	11	1
2	98	1	11	1	24	1
3	854	1.4	23	1.4	60	1.4
4	10909	1.4	27	1.4	78	1.4
5	105911	1.7	63	1.7	181	1.7
6	–	–	146	2	354	2
7	–	–	417	2.2	564	2.2
8	–	–	972	2.4	840	2.4
9	–	–	3560	2.6	1108	2.6
10	–	–	8376	2.8	1655	2.8

Мінімально необхідна кількість пошукових кроків для кожного із вимірів виділено жирним контуром. З таблиці видно, що неселективний метод рівноімовірного вибору варіантів має найгірші показники роботи. Цей метод забезпечує розв'язування пошукової задачі у середньому за N^m кількість кроків. При $m < 8$ найефективнішим є селективний метод рівноімовірного вибору варіантів, а при $m \geq 8$ – ігровий адаптивний метод.

Вплив ширини пошукового простору на ефективність роботи методів показаний у табл. 2 для значення дисперсії $d_y = 1$. Як видно із отриманих результатів, селективний метод рівноімовірного вибору варіантів потребує найменшу кількість кроків для розв'язування пошукової задачі.

Таблиця 2

Вплив ширини пошукового простору на ефективність методів випадкового пошуку

Ширина пошукового простору, N	Неселективний рівноймовірний вибір варіантів		Селективний рівноімовірний вибір варіантів		Адаптивний ігровий вибір варіантів	
	Середня кількість кроків	Середня похибка	Середня кількість кроків	Середня похибка	Середня кількість кроків	Середня похибка
10	98	1	11	1	24	1
20	429	1.4	18	1.4	86	1.4
30	852	1.4	18	1.4	129	1.4
40	1457	1.4	18	1.4	186	1.4
50	2638	1.4	20	1.4	251	1.4
60	3697	1.4	20	1.4	297	1.4
70	5792	1.4	19	1.4	367	1.4
80	6813	1.4	19	1.4	405	1.4
90	7517	1.4	23	1.4	476	1.4
100	10726	1.4	19	1.4	503	1.4

Аналіз даних табл. 1 та табл. 2 показує, що розмірність пошукового простору m більше впливає на роботу пошукових методів, ніж його ширина N. Це пояснюється тим, що загальна кількість варіантів пошуку N^m (при $N_i = N$ для всіх $i = \overline{1, m}$) є показниковою функцією кількості вимірів m і степеневою функцією ширини N пошукового простору.

У разі зміни величини дисперсії ефективність адаптивного ігрового методу змінюється. Так, цей метод є кращим (при диз'юнкції умов зупинки) від селективного методу рівноімовірного вибору варіантів при нульовій дисперсії переміщення об'єкта, що відповідає задачі випадкового пошуку статичного об'єкта (див. рис. 2). Але, за цих самих умов цей метод програє за ефективністю детермінованому методу покоординатного спуску [22].

Рис. 2. Ефективність методів випадкового пошуку для $N = 10$ та значення дисперсії $d_y = 0$:

1 – селективний метод рівноімовірного вибору варіантів;
2 – ігровий адаптивний метод;
3 – детермінований метод покоординатного спуску

Із зростанням дисперсії адаптивний ігровий метод забезпечує розв'язування пошукової задачі за меншу кількість кроків, ніж селективний метод рівноімовірного вибору варіантів. На рис. 3 зображено графіки зміни середньої кількості кроків від кількості вимірів пошукового простору для селективного методу рівноімовірного вибору варіантів та адаптивного ігрового методу для значення дисперсії $d_y = 10$.

Рис. 3. Ефективність методів випадкового пошуку для $N = 10$ та значення дисперсії $d_y = 10$:
1 – селективний метод рівноімовірного вибору варіантів;
2 – ігровий адаптивний метод

Як видно з рис. 3, починаючи з $m = 6$, ігровий адаптивний метод забезпечує пошук об'єкта зі стохастичним переміщенням за меншу кількість кроків, ніж селективний метод рівноймовірного вибору варіантів. Для порівняння, для значення дисперсії $d_y = 1$ ігровий метод мав переваги при $m \geq 8$.

Отже, за ускладнення умов пошуку, наприклад, обумовлених значним зростанням кількості варіантів пошуку та дисперсії, адаптивний ігровий метод за ефективністю переважає селективний метод рівноймовірного пошуку.

На рис. 4 зображено одну із реалізацій траєкторії активного об'єкта у двовимірному просторі з кроком дискретизації, що дорівнює 1. Початкові координати активного об'єкта дорівнюють (3, 7). Математичне сподівання координат шуканого об'єкта становить (7, 1). Зміною інтенсивності сірого кольору зображено лінії рівня функції відстані до математичного сподівання координат шуканого об'єкта. Результати отримано на вибірці *n=10000* кроків з ігноруванням умов зупинки гри 1–3 ігрового алгоритму.

Рис. 4, а відповідає пошуку статичного об'єкта (дисперсія переміщення $d_y = 0$), а рис. 4, б – динамічного об'єкта (дисперсія переміщення $d_y = 1$). Порівняння рисунків показує, що під час зростання дисперсії кількість пробних кроків ігрового методу збільшується.

У процесі пошуку формується розподіл координат активного об'єкта з модою, яка відповідає математичному сподіванню координат переслідуваного об'єкта. На завершальних кроках пошуку траєкторії активного об'єкта є паралельними осям координат і перетинаються у точці локалізації шуканого об'єкта. Це свідчить про знаходження розв'язків ігрової задачі у чистих стратегіях.

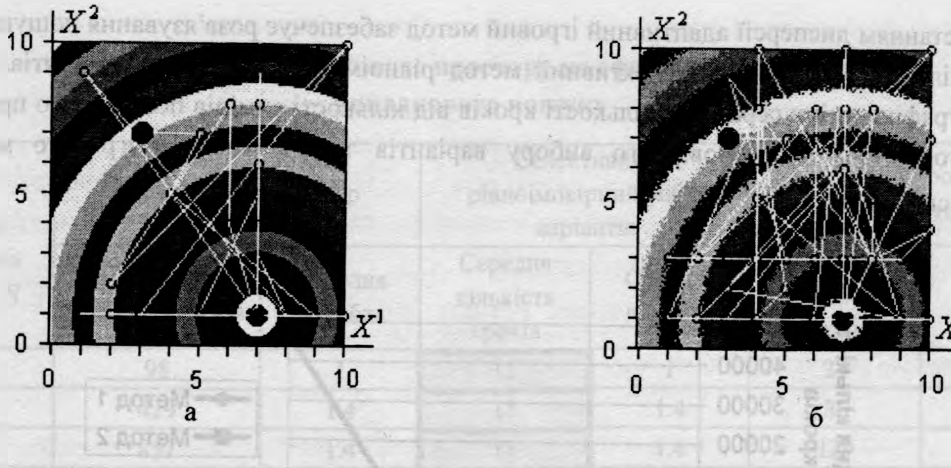


Рис. 4. Траєкторія пошуку об'єкта для фіксованих значень дисперсії

Цілеспрямоване наближення до шуканого об'єкта добре видно на рис. 5, де зображено зміну усереднених у часі координат активного об'єкта при фіксованих значеннях дисперсії переслідуваного об'єкта. Середні значення координат обчислювались так:

$$\overline{x}^i(n) = n^{-1}\sum_{t=1}^{n} x_t^i\,,\ i = \overline{1,m}\,.$$

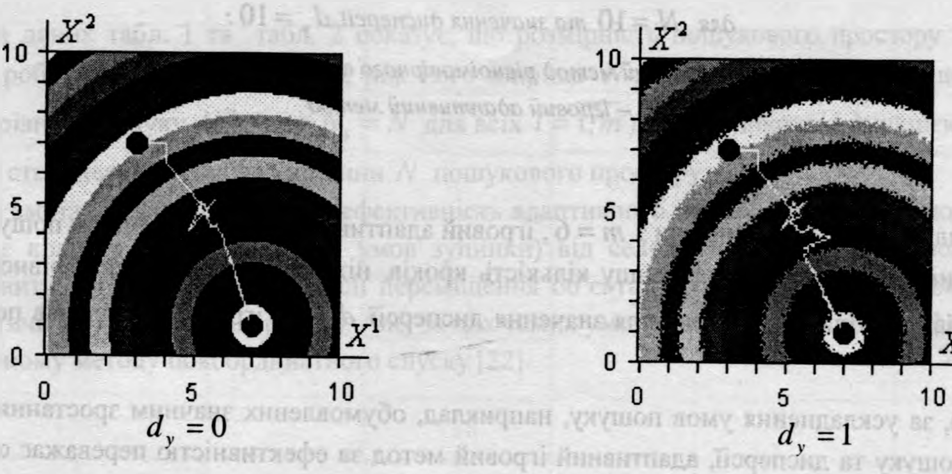


Рис. 5. Усереднена у часі траєкторія пошуку об'єкта

Величина дисперсії імітує зростання швидкості переміщення об'єкта, що ускладнює його переслідування. Динаміку зміни усередненої у часі відстані між об'єктами (16) у процесі розгортання гри "переслідування" для різних значень дисперсії зображено на рис. 6.

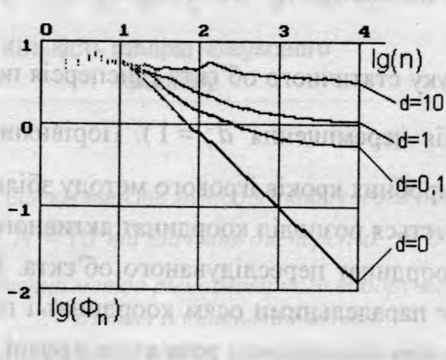


Рис. 6. Зміна функції поточних середніх втрат у часі при різних значеннях дисперсії

При зростанні значення дисперсії середня відстань між об'єктами зростає, і її значення стабілізується у часі. Однак, як видно з табл. 1, табл. 2 та з рис. 5, це не означає, що активний об'єкт не зможе досягнути шуканого об'єкта. Суміщення координат об'єктів можливе за рахунок їх випадкового переміщення.

Висновки

Для розв'язування задачі випадкового пошуку динамічного об'єкта (або мінімізації векторних критеріальних функцій) в умовах невизначеності доцільно використовувати адаптивні ігрові методи. Такі методи ефективно працюють у найнесприятливіших умовах – багатовимірних пошукових середовищах та великих дисперсіях випадкових процесів. Ефективність ігрових методів пояснюється їх двома важливими особливостями. Перша особливість полягає у розпаралелюванні задачі випадкового пошуку, а друга, основна, – у закладеному в них механізмі самонавчання, який забезпечує селекцію кращих поточних розв'язків за допомогою динамічних векторів змішаних стратегій.

1. Трухаев Р.И. Модели принятия решений в условиях неопределенности. – М.: Наука, 1981. 2. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Управление в условиях неопределенности (синтез адаптивных систем управления) // Автоматика. – 1987. – № 5. – С. 16–26. 3. Цыпкин Я.З., Позняк А.С. Рекуррентные алгоритмы оптимизации в условиях неопределенности // Итоги науки и техники. Сер. Техническая кибернетика. – 1989. – Т. 16. – С. 3–70. 4. Гладун В.П. Эвристический поиск в сложных средах. – К.: Наукова думка, 1977. 5. Gerhard Weiß and Sandip Sen, editors. Adaptation and Learning in Multiagent Systems. Springer Verlag, Berlin, 1996. 6. Срагович В.Г. Адаптивное управление. – М.: Наука, 1981. 7. Королюк В.С. Стохастические модели систем. – К.: Наукова думка, 1989. 8. Растригин Л.А., Рипа К.К., Тарасенко Г.С. Адаптация случайного поиска. – Рига: Зинатне, 1973. 9. Цыпкин Я.З. Основы теории обучающихся систем. – М.: Наука, 1970. 10. Кравець П.О. Селективні методи випадкового пошуку // Матеріали Міжнародної науково–практичної конференції "Динаміка наукових досліджень". Т. 1. Сучасні комп'ютерні інформаційні технології. – Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2002. – С. 18 – 21. 11. Кравець П.О. Методи розпаралелювання випадкового пошуку. // Інформаційні системи та мережі: Вісник НУ "Львівська політехніка". – 2003. – № 489. – С. 163–177. 12. Кравець П.О. Оптимізація випадкового пошуку генетичним методом з розпаралелюванням // Інформаційні системи та мережі: Вісник НУ "Львівська політехніка". – 2002. – № 464. – С. – 158–171. 13. Назин А.В., Позняк А.С. Адаптивный выбор вариантов: Рекуррентные алгоритмы. – М.: Наука, 1986. 14. Fudenberg, D., Levine, D.K.: The Theory of Learning in Games. MIT Press, 1998. 15. Stone, P.: Layered Learning in Multiagent Systems. MIT Press, 2000. 16. Кравець П.О. Регуляризований ігровий метод керування випадковими процесами в умовах невизначеності // Комп'ютерна інженерія та інформаційні технології: Вісник НУ "Львівська політехніка". – 2002. – № 468. – С. 101 – 109. 17. Кравець П.О. Самоорганізація гри активних елементів в умовах дії колективних оцінок // Искусственный интеллект: Міжнародний науково–теоретичний журнал Інституту проблем штучного інтелекту. – Донецьк. – 2004 – № 4. – С. 358 – 367. 18. Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З. Стохастическая оптимизация и рекуррентное оценивание. – М.: Наука, 1972. 19. Вазан М. Стохастическая аппроксимация. – М.: Мир, 1972. 20. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. – М.: Мир, 1985. 21. Кравець П.О. Рекурентні ігрові алгоритми з обміном інформацією // Інформаційні системи та мережі: Вісник ДУ "Львівська політехніка". – 1999. – № 383. – С. 112–128. 22. Батищев Д.И. Методы оптимального проектирования. – М.: Радио и связь, 1984.