УДК 681.325

І.О. Процько
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра систем автоматизованого проектування

ЕФЕКТИВНЕ ОБЧИСЛЕННЯ ДИСКРЕТНИХ КОСИНУСНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Розглянуто узагальнений підхід ефективного обчислення дискретного косинусного перетворення (ДКП) на основі циклічних згорток. Підхід ґрунтується на приведенні матриці аргументів і матриці знаків дійсного базису ДКП до еквівалентних циклічних секцій.

The general method of efficient computation discrete cosine transform using of circular convolutions is considered. The method is based on the presentation of the matrix of arguments and signs of the real harmonic transform basis to the equivalent cyclic sections.

Вступ. Під час проектування обчислювальних засобів використовуються ефективні алгоритмічні підходи щодо проведення обчислювального процесу. В сучасних комп’ютерних системах для обробки даних широко застосовуються ортогональні гармонічні перетворення інформації з оригіналів в образ і навпаки. Для представлення, дійсних даних в їхній спектральний образ поряд з швидким перетворенням Фур’є використовується дискретне косинусне перетворення [1], яке ґрунтується на ефективних алгоритмах, реалізованих на основі програмно-апаратних або апаратно-орієнтованих засобів.

Особливо поширені алгоритми цього класу для перетворення значень обсягів даних, що дорівнюють цілому степеню двійки. Але фізична природа багатьох явищ характеризується обсягом інформації, що може мати довільну кількість даних. Тому для спектрального, кореляційного, кепстрального аналізів, кодування, розпізнавання та відтворення актуальним є довільний обсяг вхідних даних. Тобто, обчислення повинно виконуватись над змінною кількістю відліків N масиву даних, що належать значенню елемента з множини натуральних чисел.

Тому є актуальним дослідження і розвиток загальних підходів ефективного обчислення дискретних перетворень послідовностей довільного обсягу, що дасть можливість проектувати універсальні інструменти спектрального представлення інформації. Існуючі підходи мають як свої переваги, так і особливості, що полягають в специфічній складності синтезу швидкого алгоритму для певних конкретних значеннь обсягів та можливості узагальненого представлення для будь-якого обсягу перетворення.

Постановка проблеми. Для представлення даних в їх спектральний гармонічний образ застосовуються перетворення класу Фур’є з використанням ефективних алгоритмічних підходів. Розклад сигналів на гармонічні складові здійснюють у більшості випадків з використанням рівномірно розміщених на одиничному колі базисних гармонічних функцій з аргументами, що визначають дискретні значення послідовності результату обробки за загальної кількості вхідних і вихідних значень N. Найбільш поширені швидкі алгоритми гармонічних перетворень для сталого значення N вхідного обсягу сигналів, особливо тих, що дорівнюють $N = 2^n$ ($n = 2, 3,…,k$), що і визначало параметри створюваних інформаційних засобів. При одержанні вхідного масиву іншого обсягу ці алгоритми зі сталим значенням N вхідного обсягу сигналів або такого, що дорівнює $N = 2^n$ вимагали доповнення нульовими значеннями вхідної послідовності або зміни частоти дискретизації вхідного сигналу. Розвиток сучасних засобів на основі інформаційних технологій висуває вищі вимоги щодо функціональної можливості відносно алгоритмічних та на їх основі програмно-апаратними засобами вимагає вибрати відповідну величину роздільної здатності, що визначається ефективним інтервалом концентрації інформаційної енергії.

Результати останніх досліджень. Розширення функціональних можливостей алгоритмів дискретних гармонічних перетворень програмних або апаратних засобів перш за все забезпечується можливістю проведення обчислень для змінних обсягів вхідних послідовностей. Це потребує при широкій реалізації в різноманітних обчислювальних системах єдиного підходу в схемі обчислень для різних меж перетворення. Одержано різноманітні форми узагальненого опису як косинусних, так і інших перетворень класу Фур'є [2]. Існуючі підходи мають як свої переваги, так і особливості, що полягають в специфічній складності визначення обчислювальних алгоритмів для певних значень обсягів. Адже програмна реалізація даних підходів вимагає створення уточнюючих алгоритмів на конкретних етапах виконання дискретних перетворень для змінних обсягів вхідних послідовностей.

Цілі статті. Розроблення узагальненої схеми ефективного обчислення дискретних косинусних перетворень вимагає розгляду: базису косинусного перетворення на основі періодичності та симетрії гармонік, що є елементами базису; формування матриці аргументів базису за твірним масивом, що визначає структури матриць аргументів базису і відповідні еквівалентно-структурні матриці знаків косинусного перетворення послідовностей довільного обсягу; виділення підмножин значень обсягів, що мають типові блочно-матричні структури.

Основний матеріал. ***1. Приведення обчислення ДКП до циклічних згорток.*** Одним з підходів в теорії синтезу алгоритмів дискретних перетворень в цифровій обробці сигналів є приведення обчислення до циклічних згорток. Тобто, алгоритми швидких згорток дають змогу ефективно обчислювати гармонійні дискретні перетворення і здійснювати зворотний процес. Цей підхід до ефективного обчислення запропоновано в роботі Рейдера [3]. Дискретне перетворення з базисом W зводилось до обчислення циклічної згортки для послідовності обсягом, що дорівнює простому числу. В основу приведення дискретного перетворення:

$$X(k) = \sum_{r=0}^{N-1} x(r)W^{rk}, \tag{1}$$

де n, k = 0,...N-1, до циклічної згортки покладено переіндексацію порядку вхідної послідовності x(n). Для цього застосовано первісний корінь g з відповідним показником степеня, що зводить добуток індексів до додавання показників степеня числа g. Тобто, обчислення набуває вигляду:

$$X(g^{l})= \sum_{m=0}^{N-2} x(g^{-m})W^{g^{(l-m)}} + x(0) \tag{2}$$

При цьому враховується, що $W^{nk} = W^{(nk)\mathrm{mod}N} = W^{g^{l} g^{m}} = W^{g^{(l+m)}}$ та $W^{N}=1$. Числу g відповідає первісний корінь з властивостями $g^{N-1}=1$, $g^{k}\neq 1$ для $0<k<N-1$. Вираз (2) відповідає циклічній згортці без введення x(0) [6].

Цей підхід розвинуто та узагальнено в роботах Винограда [5] для послідовностей обсягом, що дорівнює простому числу та степеню простого числа, та виведено формулу обчислювальної складності для мінімальної мультиплікативної складової. В цих алгоритмах використовуються для переіндексації порядку даних конкретні обчислення, що ґрунтуються на китайській теоремі про залишки, властивостей прямого добутку матриць та алгоритмів циклічної згортки.

2. Аналіз структури матриці аргументів базису ДКП. Проаналізуємо структуру матриці базису ДКП для довільних значень обсягів N. ДКП [4] визначається послідовністю вихідних X(k), k = 0,1,…,N-1 та вхідних даних x(n), n=0,1,…,N-1 як

$$X(k) = \sum_{r=0}^{N-1} c(r)\, x(r)\cos[(2k + 1)r\Delta\varphi], \tag{3}$$

де

$$c(r) = \begin{cases} 2^{-1/2}, & \text{якщо } r=0; \\ 1, & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

$\Delta\varphi=\pi/2N$; N – ціле значення обсягу ДКП.

Проведемо декомпозицію та детальний аналіз аргументів базису ДКП, що є елементами матриці з (3). Функція $\cos((2k+1)r\pi/2N)$ – періодична відносно 4N, тому можна записати на основі базису матрицю аргументів косинусу порядку (N×2N) у вигляді:

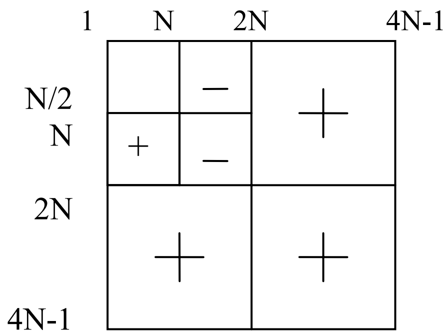
$$V = [v(r, k) \bmod 4N], \tag{4}$$

де $v(r,k) = k \times r$ – значення аргументів матриці за $k = 1(1)N-1$ рядком та $r = 1(1)2N-1$ стовпцем. Враховуючи симетричність матриці V аргументів функцій базису ДКП, їх можна повністю визначити для значень $v(r,k)$, що можуть набувати 0(1)N, але доповнюючи матрицями знаків Zc косинуса.

Матриця знаків косинуса Zc формуються на основі елементів матриці (4) і визначаються за нерівностями:

$$Zc[r,k] = \begin{cases} +1, & \text{якщо } 3N<v(r,k)<N \\ 0, & \text{якщо } v(r,k)=N,\ 3N \\ -1, & \text{якщо } N<v(r,k)<3N \end{cases}, \tag{5}$$

де $k = 1(1)N$, $r = 1(1)2N-1$ для (6) і $r, k = 1(1)\{N/2\}$ для (7).



Симетричність розміщення елементів у матрицях знаків Zc ДКП

На рисунку показано симетрію розміщення значень знаків косинусної матриці Zc, де + – симетричне відображення значень косинуса з віссю між стовпцями (2N–1) і 2N; – антисиметричне відображення значень рядків з віссю між стовпцями (N–1) і N матриці значень знаків косинуса; симетричне відображення значень парних і непарних рядків з віссю між рядками (N/2-1) значень обсягів перетворення N.

Аналіз одержаних матриць V (4) для аргументів базису ДКП, що містять цілі числа, показує, що в матриці кожен рядок містить набір елементів $v(r, k) \bmod 4N$, що не повторюються. Матриця V (4) для аргументів базису ДКП симетрична по осі π для косинусної функції, тому

$$V' = \begin{cases} 4N-v(r, k), & \text{якщо } v(r, k) > 2N, \\ v(r, k), & \text{якщо } v(r, k) \le 2N \end{cases} \tag{6}$$

Одержану матрицю V (6) для аргументів базису ДКП можна представити набором елементів $v'(r, k)$, враховуючи асиметрію по осі $\pi/2$ для косинусної функції, з доповненням матрицею знаків (5).

$$V'' = \begin{cases} 2N-v(r, k), & \text{якщо } v(r, k) > N, \\ v(r, k), & \text{якщо } v(r, k) \le N \end{cases} \tag{7}$$

Отже, в результаті декомпозиції базису ДКП одержано матрицю аргументів базису V'', що містить цілі значення елементів в межах від 1 до N, та відповідну матрицю знаків Zc зі значеннями елементів +1, -1, 0.

У випадку довільного обсягу визначення матриць аргументів базису ДКП вимагає обчислень за формулами (4)–(7) для кожного конкретного значення обсягу. Ефективніше формувати елементи декомпозиції за допомогою твірних масивів індексів P(n) та знаків Z(n)

$$P(n) = P(n_1)P(n_2) \ldots P(n_k), \tag{8}$$

$$Z(n) = Z(n_1)Z(n_2) \ldots Z(n_k), \qquad (9)$$

де n =2*N-1 – розмірність масиву, k – кількість підмасивів, елементи твірного масиву n_k – цілі значення твірних масивів індексів P(n) в межах від 1 до 2*N–1 та знаків Z(n) з +1, -1, 0.

Масиви P(n), Z(n) одержано з використанням підстановки за першим та відповідним рядками матриці V' (6) аргументів та матриці знаків Zc (5) дискретного косинусного базису. Наприклад, для малих обсягів перетворення матимемо твірні масиви:

N=7 P(13) =(1 3 9) (13 11 5) (0) (2 6 10) (12 8 4)
Z(13) =(+1+1-1)(-1-1+1) (1) (+1+1-1)(-1-1+1);
N=8 P(15) =(1 3 9 5 15 13 7 11) (0) (2 6 14 10) (4 12),
Z(15) = (+1+1-1+1-1-1+1-1)(1) (+1+1-1 -1)(+1-1);
N=9 P(17) = (1 5 11 17 13 7) (3 15) (0) (2 10 14) (16 8 4) (6 12),
Z(17) = (+1+1-1-1-1+1) (+1-1) (1) (+1-1-1) (-1+1+1) (+1-1);
N=10 P(19) =(1 3 9 13) (19 17 11 7) (5 15) (0) (2 6) (18 14) (4 12) (16 8),
Z(19)= (+1+1+1-1) (-1 -1 -1 +1) (+1-1) (1) (+1+1)(-1-1) (+1-1)(+1-1);
N=12 P(23) =(1 5 23 19) (3 15 21 9) (7 13 17 11) (0) (2 10) (22 14) (4 20) (18 6) (8 16),
Z(n) = (+1 +1-1-1) (+1-1-1+1) (+1-1 -1 +1) (1) (+1 +1) (-1-1) (+1-1) (-1+1) (+1-1).

Сформовані твірні масиви P(n) визначають структури матриць аргументів V' базису ДКП з доповненням відповідними еквівалентними матрицями знаків Z'c, що в сукупності становлять цілісність базису ДКП для послідовностей довільного обсягу. Взаємозв'язок елементів декомпозиції базису ДКП для формування матриці аргументів V' і відповідної еквівалентної матриці знаків Z'c потребує переставлення рядків і стовпців відповідно до твірного масиву P(n), над матрицею аргументів V' (6) та над матрицею Zc (5) знаків косинуса.

Під еквівалентними матрицями, що складаються з різних елементів, розуміють матриці одного порядку з однаковими властивостями, які можуть містити відповідні підматриці з однаковими порядками та властивостями.

Розглянемо структуру та властивості сформованих за твірним масивом P(n) матриць V' аргументів базису ДКП послідовностей довільного обсягу та відповідних матриць знаків Z'c косинуса. За твірним підмасивом $P(n_i)$ шляхом циклічного зсуву вліво формуються рядки квадратної підматриці матриці V' аргументів базису ДКП та аналогічно за $Z(n_k)$ підматриці знаків. Кожна одержана квадратна підматриця на основі твірного підмасиву $P(n_i)$ де i=1(1)k, містить однакові елементи, розміщені паралельно бічній діагоналі v[i,j]=v[k,l], при i+j=k+l, де i,j,k,l $\in$ {1,2,..., n}, v[i,j] $\in$ P(n), або однакові елементи, симетрично розміщені відносно головної діагоналі. Тобто такі квадратні підматриці називаються Ганкелевими (Hankel), що повністю визначаються своїм першим рядком або останнім стовпчиком. Окрім того, у цієї Ганкелевої матриці кожен наступний рядок одержаний з попереднього циклічним зсувом вліво. Тобто Ганкелева матриця повністю визначається своїм першим рядком – матриці називають лівоциркулянтними, або циклічними зліва.

Можна сформулювати на основі декомпозиції та аналізу базису ДКП (4)–(9) для відповідних косинусних частин $P(n_k)$ та $Z(n_k)$ теорему еквівалентності структур матриці значень цілочислових аргументів і матриці знаків.

Теорема. Для квадратних підматриць цілочислових аргументів, сформованих за твірним масивом P(n) (8) і відповідних підматриць знаків косинусу, сформованих за твірним масивом Z(n) (9) порядку n_i де i=1(1)k, обчислених на основі періодичності та симетрії косинусного базису, існує еквівалентність структур для матриць аргументів V' та знаків Z' в базисі ДКП довільного обсягу N.

Доведення. Значення величин cos[(2k + 1)rπ/2N], для k = 0(1)N–1, r = 0(1)2N–1 дійсного базису ДКП, рівномірно розподілених на відрізку (0,2π), періодичні відносно 2π {4N} для взаємовідповідних абсолютних величин аргументів (4) косинуса і для значень їхніх знаків (5). Крім того, абсолютні величини значень косинуса симетричні відносно осі π {2N} та асиметричні відносно осі π/2 {N}. Тому частини елементів декомпозиції базису ДКП матриці аргументів V' із значеннями на відрізку (0, π/2) і матриці знаків Z', як їхні підматриці та одержані властивості для порядку {N}$\times${2N}, є взаємовідповідними, тобто еквівалентними.

Обчислення ДКП на основі проведеної декомпозиції. Одержана структура матриць показників степені V' і відповідних матриць знаків Z' на основі P(n), Z(n) задає процес проведення обчислення ДКП послідовностей довільного обсягу за допомогою циклічних згорток. При цьому необхідно застосовувати швидкі алгоритми циклічних згорток [5], що і визначатимуть основні обчислювальні затрати цього трансформування.

На початковому етапі проводиться переставлення вхідних даних, що визначається за твірним масивом P(n). Одночасно можуть визначатись коефіцієнти косинусних складових базису ДКП, що беруть участь в операціях згортки. Для косинусної частини групуються вже об'єднані вхідні дані x(i), i = 1(1)2N–1.

Для підматриць, що містять парні значення аргументів, у матриці базису ДКП містяться однакові, але протилежні за знаком підматриці, що задаються відповідними твірними підматрицями $P(n_k)$ з парними елементами, тобто

$$P(n_k) = P(n_k) \times (-1), \quad \text{для } i = 2j, \quad j = 1, (1)... \qquad (10)$$

Це вимагає додаткових об'єднань даних на початковому етапі, точніше – виконання операцій зсуву вліво.

На основі сформульованої теореми за твірним масивом P(n) з матриці показників степеня V базису ДКП послідовностей довільного обсягу і відповідної матриці знаку Z виділяються еквівалентні циклічні секції. Вони можуть задавати додаткові об'єднання даних на початковому етапі обчислення, що визначаються за кількістю та обсягом циклічних згорток, необхідних для проведення обчислення.

Другий етап передбачає виконання циклічних згорток. Особливості структур для обчислення ДКТ на основі циклічних згорток зазвичай не перекривають всього розмаїття конкретних матричних структур базису ДКП послідовностей довільного обсягу. Тому основними особливостями за результатами досліджень сформованих матриць за твірним масивом P(n) цілих значень обсягів N можна вважати виконання симетричних циклічних згорток для парних обсягів. Наприклад, для ДКП обсягом N=8 на основі сформованої матриці базису необхідно виконати 4-точкову симетричну циклічну згортку виду

$$[\cos(2\Delta\varphi), \cos(6\Delta\varphi), -\cos(2\Delta\varphi), -\cos(6\Delta\varphi)]*[\,x(2), x(6), -x(2), -x(6)].$$

У сформованої матриці базису ДКП загальний обсяг підматриць з парними значеннями аргументів вдвічі менший за обсяг підматриць з непарними значеннями. Наприклад, для ДКП обсягом N=7 сформована матриця базису матиме вигляд

$$A\begin{bmatrix} -A & B & \\ -A & A & B \\ & & \end{bmatrix}, \qquad (11)$$

де A формується за твірним підмасивом (1 3 5) для непарних значень та B – (2 6 4) для парних значень аргументів косинусного базису.

Серед підмножин обсягів ДКП з множини натуральних чисел можна виділити S={2,4, 8, 16, 32, 64, 128,256,...}, що містить обсяги N цілого степеня два. Для цих обсягів можна узагальнити одержану структуру базисної матриці та подати кількість згорток -s, з обсягами -d на основі цього підходу у вигляді таблиці.

Циклічні згортки в структурі базису ДКП для обсягів цілого степеня два

N	4	8	16	32	64	128	...
s	2	3	4	5	6	7	
d	4 1	8 4 1	16 8 4 1	32 16 8 4 1	64 32 16 ... 4 1	128 64 32 ... 4 1	...

На завершальному етапі на основі одержаної матричної структури об'єднуємо одержані впродовж попередніх етапів значення циклічних згорток і, компонуючи послідовно одержані частини, обчислюємо вихідні значення дійсних дискретних коефіцієнтів ДКП .

Висновки. У роботі показано, як на основі переставлення елементів вхідної послідовності обчислюється ДКП за допомогою ефективних алгоритмів згортки. Визначення твірного масиву, за яким відбувається переставлення, не потребує спеціальних обчислень і визначається на основі двох рядків матриці аргументів (4). Використання твірного масиву P(z) приводить до однотипового підходу до проведення обчислення ДКП при проектуванні мікроелектронних обчислювальних засобів послідовностей довільного обсягу. Окреме обчислення циклічних згорток, за яким структуровано базис ДКП, а також подальше об'єднання одержаних результатів дає змогу розпаралелювати процес обчислення і підвищувати швидкодію опрацювання інформації.

1. S. Lawrence Marple, Jr., Digital spectral analysis with applications, NJPrentice-Hall, 1987. 2. Bjeng Gi Lee, A new algorithm to compute the discrete cosine transform./IEEE Trans. On Ac.,Sp., and Sign. Proc. – 1984. – №6, vol. 32. – P. 1243–1245. 3. Rader C.M. Discrete Fourier transform when the number of data samples is prime. Proc. IEEE. – 1968. – 56. 4. Gilbert Strang, The Discrete cosine transform / SIAM Review. – 1999. – Vol. 41. – P. 135–147. 5. Макклеллан Дж.Х., Рейдер Ч.М. Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1983.

УДК 681.325

О. Березький, І. Цмоць*

Тернопільський національний економічний університет,
*Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра автоматизованих систем управління

МЕТОДИ ТА НВІС-СТРУКТУРИ ДЛЯ МНОЖЕННЯ МАТРИЦІ НА МАТРИЦЮ У РЕАЛЬНОМ ЧАСІ

Розроблено нові, орієнтовані на НВІС-реалізації методи, алгоритми та структури для послідовного, паралельно-послідовного та паралельно-паралельного множення матриці на матрицю у реальному часі з високою ефективністю використання обладнання.

The new methods, algorithms and structures oriented on VLCI-realization are developed for the serial, parallel-serial and parallel-parallel multiplying of matrix by a matrix in real-time with high efficiency of the use of equipment.

Вступ. Для синтезу текстурних зображень різних типів перспективним підходом є функціональний (процедурний), який використовує функції (алгоритми, процедури) для побудови зображення [1]. При цьому вихідне зображення може бути представлене в матричному вигляді, а процедури перетворення (афінні перетворення) також представляються в матричному вигляді [2]. У випадку, якщо час генерування некритичний (статичні зображення), використовують програмний спосіб перемноження матриць. Динамічні зображення вимагають синтезу текстур у реальному часі. Це накладає жорсткі вимоги до часу синтезу. Для зменшення часу обчислення реалізують алгоритми перемноження матриць на апаратному рівні. Сучасні відеокарти мають вбудовані графічні процесори, які дають змогу апаратно реалізовувати алгоритми множення матриць [3]. Інший шлях – це проектування спецпроцесорів на програмованих логічних інтегральних схемах за, якими будують структури для послідовного, паралельно-послідовного та паралельно-паралельного множення матриці на матрицю у реальному часі з високою ефективністю використання обладнання [4–12].