

## ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ СТРУКТУРИ АДАПТИВНОГО ДО ОБСЯГУ ШПФ

© Процько І.О., 2009

**Розглянуто обчислення адаптивного до обсягу перетворення класу ШПФ (швидке перетворення класу Фур'є або дискретні гармонічні перетворення) на основі циклічних згорток. Дискретна базисна матриця перетворення представляється циклічними підматрицями, що задають ефективну модель обчислення. Запропоновано обчислювальні структури на основі потоку команд і потоку даних для цього підходу виконання дискретних гармонічних перетворень.**

**Ключові слова – ШПФ, обчислювальні структури, потік команд, потік даних**

**The proposed computation adaptive to transform size FFT (class of Fourier transform or discrete harmonic transforms) is based on cyclic convolutions. The discrete basis matrices of transform are presented of cyclic submatrices defining the efficient model of execution. The control-flow and dataflow structures is considered for proposed computational approach of discrete harmonic transforms.**

**Keywords – FFT, computational structures, control-flow, data-flow**

### Вступ

Новітні інформаційні технології використовують представлення дискретних даних через дискретні гармонічні перетворення не тільки при моделюванні систем та спектральному, кореляційному, кепстральному аналізах, але в різноманітних технологіях цифрового оброблення (кодування, розпізнавання та відтворення) даних [1].

Спектри є зручною аналітичною формою зображення сигналів складної форми, що відповідають зваженій сумі базисних функцій

$$U(t) = \sum_k C_k \phi(t)_k, t \in [t_1, t_2], \quad (1)$$

де  $U(t)$  – сигнал;  $C_k$  – узагальнені коефіцієнти Фур'є;  $\phi(t)_k$  – базисна функція.

Повні системи ортогональних базисних функцій забезпечують як завгодно малу різницю між неперервною функцією та її рядом за необмеженого збільшення кількості його членів. Гармонічний базис дискретного перетворення  $X = W^* x$ , в матричній формі може задаватись:

$$W(k,n) = \exp(-j2\pi kn/NT), \quad (\text{дискретне перетворення Фур'є, ДПФ});$$

$$W(k,n) = \text{cas}(2\pi kn/NT) = (\cos(2\pi kn/NT) + \sin(2\pi kn/NT)), \quad (\text{дискретне перетворення Хартлі, ДПХ});$$

$$W(k,n) = c(n) x(n) \cos[\pi(2k+1)n/2NT], \quad (\text{дискретне косинусне перетворення, ДКП}),$$

$$\text{де } c(n) = \begin{cases} 2^{-1/2}, & \text{якщо } n=0; \\ 1, & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

де  $W(kxn)$  – квадратна базисна матриця: ( $n, k=0, (1), \dots, N-1$ ),  $x(N)$  і  $X(N)$  – матриці-стовпці вхідних та вихідних даних;  $N$  – обсяг перетворення;  $T$  – час дискретизації.

Частотні гармонійні складові є важливим інформаційним параметром мікроелектронних систем, призначених для різноманітних застосувань (біологія, медицина, космос). Тому є актуальним дослідження і розвиток загальних підходів ефективного обчислення дискретних перетворень класу Фур'є послідовностей довільного обсягу як на програмному рівні, так і рівні апаратно-орієнтованих засобів.

## Постановка проблеми

Для представлення даних в їх спектральний гармонічний образ застосовуються перетворення класу Фур'є з використанням ефективних гнучких алгоритмічних підходів. Найбільшого поширення набули швидкі алгоритми гармонічних перетворень для значення  $N$  вхідного обсягу сигналів, що дорівнюють  $N=2n$  ( $n=2,3,\dots,k$ ), що і визначало параметри створюваних інформаційних засобів. При одержанні вхідного масиву іншого обсягу ці алгоритми з сталим значенням  $N$  вхідного обсягу сигналів або такого, що дорівнює  $N=2n$ , вимагали доповнення значеннями вхідної послідовності або зміни частоти дискретизації вхідного сигналу. Додавати нульові коефіцієнти для отримання обсягів степенів двійки не рекомендується, оскільки це призводить до виникнення високочастотних артефактів. Для цього рекомендують під час оброблення сигналів застосовувати відбиття (mirroring). Тому розвиток сучасних засобів на базі інформаційних технологій ставить вищі вимоги по функціональній можливості перед алгоритмічними та на їх основі програмно-апаратними засобами.

Аналіз останніх досліджень показав, що одержано різноманітні форми узагальненого опису, як косинусних, так і інших перетворень класу Фур'є [2]. Відомі підходи мають як свої переваги, так і особливості, що полягають в специфічній складності визначення обчислювальних алгоритмів для певних значень обсягів. Розширення функціональних можливостей алгоритмів дискретних гармонічних перетворень програмних або апаратних засобів передусім забезпечується проведенням обчислень для змінних обсягів вхідних послідовностей. Це потребує при широкій реалізації в різноманітних обчислювальних системах єдиного підходу в схемі обчислень для різних обсягів перетворення.

Визначення основних особливостей узагальненої схеми ефективного обчислення дискретних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток; формування матриці аргументів базису за твірним масивом, що визначає структуру базису; розроблення на основі потоку команд і потоку даних обчислювальних структур для запропонованого підходу на основі циклічних згорток виконання дискретних гармонічних перетворень.

### Аналіз базисної матриці дискретного гармонічного перетворення

Запропонований обчислювальний підхід з використанням циклічних згорток для ефективного виконання дискретних гармонічних перетворень полягає в декомпозиції дискретної базисної матриці (1) на циклічні підматриці [3,4].

В результаті, на основі такого підходу, структуру базисної матриці задає твірний масив

$$P(n)=P(n_1) P(n_2) \dots P(n_k), \quad (2)$$

де  $k$  – число підматриць,  $n$  – обсяг масиву:

$n=\{N/2\}-1$  – косинусна частина ДПФ;

$n=N-1$  – синусна частина ДПФ;

$n=2N-1$  – для ДКП.

Число  $k$  підматриць  $P(n)$  визначається значенням  $N$  (просте, складене) обсягу перетворення.

Твірний масив  $P(n)$  об'єднує підмасиви

$$\begin{aligned} P(n_1) &= (n_{11}, n_{12}, n_{13}, \dots, n_{1L_1}), \\ P(n_2) &= (n_{21}, n_{22}, n_{23}, \dots, n_{2L_2}), \\ P(n_k) &= (n_{kL_1}, n_{kL_2}, \dots, n_{kL_k}), \end{aligned} \quad (3)$$

де  $n_{ij}$  – елемент підмасиву,  $L_i$  – кількість елементів у підмасиві  $P(n_i)$ .

Приклади твірних масивів для непарного обсягу перетворення  $N=7$

$P(3) = (1, 2, 3)$  або

$P^*(3) = (1, 2, 3)$  і  $Z(3) = (+ - -)$  – косинусна частина ДПФ;

$P(6) = (1, 2, 4) (6, 5, 3)$  або

$P^*(6) = (1, 2, 3) (1, 2, 3)$  і  $Z(6) = (++++)$  – синусна частина ДПФ;

$P(13) = (1, 3, 9) (13, 11, 5) (0) (2, 6, 10) (12, 8, 4)$  або

$P^*(13) = (1, 3, 5, 1, 3, 5) (0) (2, 6, 4, 2, 6, 4)$  і

$Z(13) = (+ + - - - +) (1) (+ + - - - +)$  – для ДКП;

для  $N=14$  парного обсягу перетворення

$$P(6)=(1,3,5)(2,6,4)(7) \text{ або}$$

$$P'(6)=(1,3,5)(2,6,4)(7) \quad Z(6)=(+ + -)(+ - -)(-) \text{ – косинусна частина ДПФ;}$$

$$P(13)=(1,3,9,13,11,5)(2,6,4,12,8,10) \text{ або}$$

$$P'(13)= (1,3,5,1,3,5)(2,6,4,2,6,4) \text{ і}$$

$$Z(13)=(+ + - - - +)(+ + + - - -) \text{ – синусна частина ДПФ;}$$

$$P(27)=(1,3,9,27,25,19)(5,15,11,23,13,17)(7,21)(0) (2,6,18)(4,12,20)(24,16,8)(26,22,10) \text{ або}$$

$$P'(27)=(1,3,9,1,3,9)(5,13,11,5,13,11)(7,7)(0)(2,6,10)(4,12,8)(4,12,8)(2,6,10) \text{ і}$$

$$Z(27)=(+ + + - - -)(+ - + - + -) (+ -)(+)(+ - -)(+ + -) (- - +)(- - +) \text{ – для ДКП.}$$

Властивості симетрії та періодичності базису гармонічного перетворення приводять до ефективнішого представлення меншими значеннями елементів твірних підмасивів  $P'(n)$  з доповненнями відповідних підмасивів знаків  $Z(n)$ . Підматриці знаків  $Z(n)$  містять значення елементів рівними +1,-1,0. Цей алгоритмічний підхід використовують, доповнюючи матрицю знаків еквівалентної структури.

Твірний масив  $P(n)$  також визначає порядок елементів вхідних даних при обчисленні дискретних гармонічних перетворень. Наприклад, для  $N=8$ , у випадку ДКП, твірний масив  $P(n)$  буде  $P(15)=(1,3,9,5,15,13,7,11)(2,6,14,10)(4, 12)(0)$  задавати порядок елементів вхідних даних:

$$x(1), x(3), -x(7), x(5), -x(1), -x(3), x(7), -x(5), x(2), x(6), -x(2), -x(6), x(4), -x(4), x(0).$$

Приклад твірного масиву  $P(n)$  та відповідних матриць індексів та знаків синусної частини ДПФ, для обсягу перетворення  $N=14$ :

1: 1 3 5 1 3 5 2 6 4 2 6 4 0	1: + + - - - + + + + - - - 0
3: 3 5 1 3 5 1 6 4 2 6 4 2 0	3: + - - - + + + + - - - + 0
9: 5 1 3 5 1 3 4 2 6 4 2 6 0	9: - - - + + + + - - - + + 0
13: 1 3 5 1 3 5 2 6 4 2 6 4 0	13: - - + + + - - - - + + + 0
11: 3 5 1 3 5 1 6 4 2 6 4 2 0	11: - + + + - - - - + + + - 0
5: 5 1 3 5 1 3 4 2 6 4 2 6 0	5: + + + - - - - + + + - - 0
2: 2 6 4 2 6 4 4 2 6 4 2 6 0	2: + + + - - - + - - - + + 0
6: 6 4 2 6 4 2 2 6 4 2 6 4 0	6: + + - - - + - - - + + + 0
4: 4 2 6 4 2 6 6 4 2 6 4 2 0	4: + - - - + + - - + + + - 0
12: 2 6 4 2 6 4 4 2 6 4 2 6 0	12: - - - + + + - + + + - - 0
8: 6 4 2 6 4 2 2 6 4 2 6 4 0	8: - - + + + - + + + - - - 0
10: 4 2 6 4 2 6 6 4 2 6 4 2 0	10: - + + + - - + + - - - + 0

#### ПАРАМЕТРИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО АЛГОРИТМУ

Параметри структури базисної матриці перетворення визначають особливість обчислювального алгоритму дискретних гармонічних перетворень. У разі розміщення однакових підматриць по вертикалі/горизонталі базисної матриці обчислюється тільки одна циклічна згортка. Це зменшує число циклічних згорток обчислювального алгоритму. Визначення відповідних параметрів на основі твірного масиву  $P(n)=P(n_1) P(n_2) \dots P(n_k)$  характеризує матричну структуру  $W$  дискретного гармонічного перетворення довільного обсягу. До таких параметрів належить :

- $N$  обсягу перетворення а)  $N=p$  (просте або непарне); б)  $N=2p$ ; в)  $N=4p$ ; г)  $N=2^p$ ;
- твірний масив  $P(n)=P(n_1) P(n_2) \dots P(n_k)$ ,  $k$  – кількість підмасивів  $P(n)$ ;
- число елементів кожного підмасиву  $(t_1),(t_2),\dots,(t_k)$ ;
- кількість підматриць  $m \geq k^2$  базової матричної структури;
- координати  $(v_{ij})$  і значення  $(p_{11}), (p_{21}),\dots,(p_{m1})$  перших елементів підматриць в матричній структурі;
- число повторень однакових підматриць  $r < m$  в матричній структурі;
- підматриці Ганкелеві і формуються за твірним підмасивом  $P(n_i)$ ;
- деякі підматриці починаються з  $(n_{ij})$  проміжного елемента твірного підмасиву  $P(n_i)$ .

Приклад матричної структури  $W$  косинусної частини ДПФ обсягу  $N=51$  подано на рис. 1  $P(n)=P(n_1) P(n_2) P(n_3) P(n_4)=(1,2, 4, 8, 16, 19, 13, 25) (3, 6, 12, 24) (5, 10, 20, 11, 22, 7, 14, 23) (9 18 15 21).$

Твірні підмасиви в матричній структурі :

$$\begin{aligned}
 P(n_1) &= (1 \ 2 \ 4 \ 8 \ 16 \ 19 \ 13 \ 25), \\
 P(n_1') &= (25 \ 1 \ 2 \ 4 \ 8 \ 16 \ 19 \ 13), \\
 P(n_3) &= (5, \ 10, \ 20, \ 11, \ 22, \ 7, \ 14, \ 23), \\
 P(n_2) &= (3 \ 6 \ 12 \ 24), \quad P(n_4) = (9 \ 18 \ 15 \ 21), \\
 P(n_2') &= (24 \ 3 \ 6 \ 12), \quad P(n_4') = (15 \ 21 \ 9 \ 18), \\
 P(n_2'') &= (6 \ 12 \ 24 \ 3), \quad P(n_4'') = (21 \ 9 \ 18 \ 15)
 \end{aligned}$$

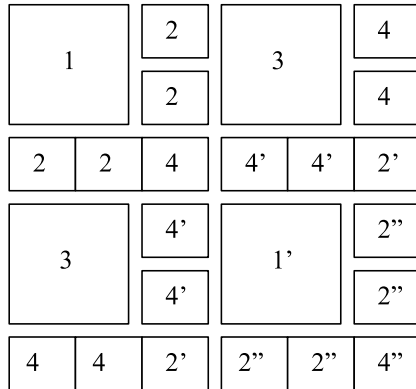


Рис. 1. Структура базисної матриці косинусної частини ДПФ обсягу  $N=51$

Структура матриці індексів пов'язана з наведеними параметрами, що задають особливості розміщення підматриць у базисній квадратній матриці дискретного перетворення.

### Обчислювальна структура керована потоком команд

Обчислювальна структура дискретних гармонічних перетворень, адаптована до обсягу перетворення, складається з двох основних частин (рис. 2) блока синтезу (SU) та процесорного блока (PU). Вхід  $x(n)$  і вихід  $X(k)$  – це послідовності даних дискретного перетворення. Довільне ціле число  $N$  – це обсяг перетворення, що подається на вхід блока SU.

Синтез ефективного алгоритму ДПФ адаптованого до обсягу перетворення включає набір паралельно-послідовних обчислень в SU. Першим є визначення приналежності натурального обсягу  $N$  до множин ( $N=p$  (простих або);  $N=2p$ ;  $N=4p$ ;  $N=2^p$ ) в блоці CUS.

Наступним важливим обчисленням в CUS є знаходження твірного масиву  $P(n)$  відповідно обсягу перетворення  $N$ . Твірний масив задається циклічним розкладом підстановки. Підстановку знаходимо за відповідними рядками матриці індексів дискретного базису  $W$  [3]. Блок SU використовує цілочислові арифметичні операції при обчисленні  $P(n)$  за обсягом перетворення  $N$ .

Блок  $P(p_1, t_1, \dots, p_s, t_s)$  та блок  $(v_{11}, v_{1j}, \dots, v_{1k})_n$ , визначають число елементів  $(t_1), (t_2), \dots, (t_k)$  кожної підматриці і координати  $(v_{ij})$  їх перших елементів. Ці параметри використовуються для аналізу матричної структури в блоці CUS.

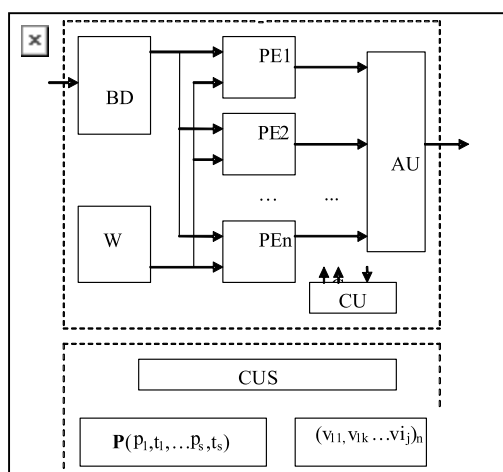


Рис. 2. Обчислювальна структура дискретних гармонічних перетворень під керуванням потоку команд

Блок PU виконує паралельне обчислення за алгоритмом, що одночасно синтезується в блоці SU. Блок PU містить (Рис.2): BD – буфер об'єднання вхідних даних  $x(n)$ , PE<sub>i</sub> – процесорні елементи циклічних згорток, CU – блок керування, W – блок обчислення тригонометричних функцій, для  $\varphi=2\pi i/N$ , де  $i=1,2,\dots,[N/2]$  або  $[N/4]$ . Виконання алгоритму в PU вирізняється трьома етапами: перший етап – виконання попереднього об'єднання даних (BD), другий – обчислення циклічних згорток (BD, PE) і завершальний – об'єднання результатів згорток (AU). Блок матрична структура визначає обчислювальну складність організації керування, що виконується в блоці PU. Наприклад, рис. 1 ілюструє, що для  $N=51$  необхідно чотири 8-точкових, дванадцять 4-точкових циклічних згорток для косинусної частини. Швидкі алгоритми циклічних згорток можуть застосовуватись при обчисленнях в PE [2].

### Обчислювальна структура керована потоком даних

Обчислювальна структура під керування потоку даних дискретних гармонічних перетворень адаптована до обсягу перетворення містить один або більше однотипових процесорних елементи (PE) об'єднаних комутаційною мережею [5]. Обчислювальна структура спеціалізованого пристрою містить BD – буфер вхідних даних, PE<sub>i</sub> – процесорні елементи, STU – блок формування токенів, К – комутатори комутаційної мережі, W – блок формування базисних векторів (рис. 3). Блок BD виконує об'єднання вхідних даних  $x(n)$  і формує вектори даних. Блок W обчислює значення тригонометричних функцій відповідно до обсягу перетворення  $N$ , для  $\varphi=2\pi i/N$ , де  $i=1,2,\dots,[N/2]$  або  $[N/4]$ .

Блок STU визначає твірний масив  $P(n)$  і загальну структуру квадратної матриці базису дискретного гармонічного перетворення. Монітор STU формує теги токенів відповідно параметрів, що задають структуру базису. Формат токена:

$$\langle c.s, v \rangle p \quad (4)$$

де  $c$  – контекст;  $s$  – адреса призначення;  $p$  – вхід адреси призначення;  $v$  – поточний вектор даних;  $c.s$  – називають тегом токена.

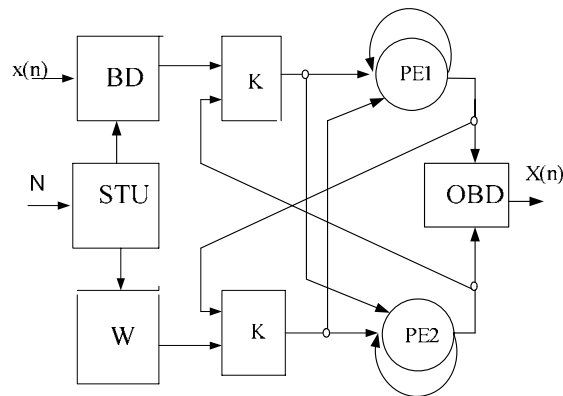


Рис. 3. Обчислювальна структура дискретних гармонічних перетворень під керуванням потоку даних

Потік даних дозволяє операціям програми виконуватись в PE як тільки вектори даних готові. Кожен процесорний елемент організовує конвеєрне виконання активізації та виконання необхідної дії. В PE є буферизація і черги токенів і відповідне виділення команд операцій.

Програма монітор відповідно до графа потоку даних (ГПД) розподіляє відповідні дані від однієї операції до наступної. Дуги ГПД вказують де необхідно відіслати результати і ноди задають операції для відповідного обсягу дискретного гармонічного перетворення.

Приклад ГПД для косинусної частини ДПФ обсягом  $N=21$  з твірним масивом  $P(n)=(1\ 2\ 4\ 8\ 5\ 10)(3\ 6\ 9)$  подано на Рис.4, що відповідає структурі базисної матриці індексів

