УДК 004.422.635.33

Білаль Раді А'Ґґель Аль-Забі, А.Б. Керницький, М.В. Лобур, С.П. Ткаченко
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра систем автоматизованого проектування

НОВІ ІНВАРІАНТИ ВСТАНОВЛЕННЯ ІЗОМОРФІЗМУ ГРАФІВ

Розглянуто питання встановлення ізоморфізму графів на основі побудови і дослідження бінарних дерев їхньої редукції.

The problem of determining the graph isomorphism on the base of binary reduction trees is considered.

Вступ

Проблеми встановлення ізоморфізму графів стосується доволі велика кількість робіт, одними з найхарактерніших є [1–4]. Низка узагальнень наводиться також у таких роботах, як [5–9]. Показано [3], що подібні задачі є комбінаторними важкорозв'язуваними задачами факторіального ступеня складності, у зв'язку з чим для їхнього розв'язання прийнятними залишаються лише евристичні прийоми [1, 10, 11].

Тому тут не будуть ефективними ні метод гілок і границь, ні методи математичного програмування, які у кращому випадку понижують складність задачі від факторіальної залежності до показникової (відносно, як правило, кількості вершин графа), а це є неприйнятним для задач практичної розмірності. Водночас існуючі евристичні прийоми розв'язання задачі (а точніше, спроби її розв'язання) мають, як правило, часову складність $O(N^c)$, де c=4÷6 [3, 8], що також різко обмежує розмірність задач, які розв'язуються, оскільки для розв'язання задач за прийнятний час необхідно, щоб було $c \le 3$.

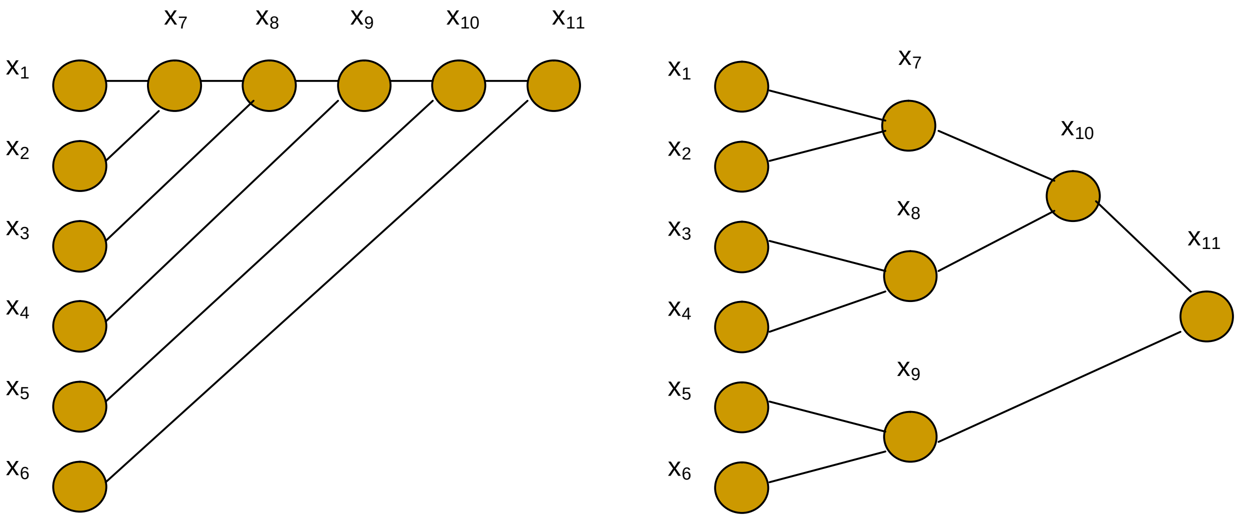
Інваріанти

На жаль, немає повного набору інваріант для графів [5], існування якого дало б змогу встановлювати ізоморфізм довільних графів, що є важливим під час проектування РЕА та ЕОМ із застосуванням графових моделей в ряді задач, зокрема верифікації і функціональної декомпозиції. Однак розв'язувати відповідні задачі необхідно, а це, з метою розроблення поліноміальних евристичних алгоритмів встановлення ізоморфізму графів, змушує повертатися до розроблення і дослідження інваріант, які б дали змогу з великим ступенем достовірності вирішувати проблему існування або відсутності ізоморфізму [12].

Безумовними інваріантами, як відомо [5], для довільного графа $G(X,Y)$, де X – множина вершин, а Y – множина ребер графа, є $n=|X|$, $m=|Y|$, та $<C>$, де C – множина степенів вершин графа.

Одним з можливих шляхів пошуку нових інварінт графа є застосування методу оптимальної редукції [13], який дає змогу побудувати інваріанти для встановлення ізоморфізму графів у вигляді відповідних бінарних зважених дерев згортки графа T_G, що дає змогу звести встановлення ізоморфізму графів до покрокового встановлення ізоморфізму бінарних дерев згортки послідовного типу (рис. 1).

Обчислювальна складність базової процедури не перевищує $O(N^3)$, а результат ґрунтується на справедливості такого твердження [12].



а б

Рис. 1. Вигляд бінарних дерев згортки T_G:
а – послідовного типу; б – паралельного (паралельного-послідовного) типу:
$x_1, x_2,\ldots,x_6$ – висячі вершини, що відповідають вершинам графа G(n=6); x_7, x_8, x_9, x_{10} – проміжні вершини дерева, що відповідають підграфам графа G; x_{11} – коренева вершина дерева згортки (редукції G), що відповідає усьому графу G

Твердження. Зв'язані ізоморфні графи G і $G^{'}$, що складаються із зв'язних множин вершин $X=\{x_1, x_2,\ldots,x_n\}$ і $X^{'}=\{x_1^{'}, x_2^{'},\ldots,x_n^{'}\}$, мають хоча б по одному ізоморфному дереву згортки (редукції) $T_G\,(V,U) \propto T_{G'}\,(V^{'},U^{'})$, де $V,V^{'}$ – множини вершин дерев, а U, $U^{'}$ – множини їхніх ребер.

Із урахуванням справедливості гіпотези Улама [5] і припущення, що ізоморфним зваженим бінарним деревам редукції графів T_G і $T^{'}_{G'}$ відповідають ізоморфні графи G і $G^{'}$, отримуємо схему розв'язання задачі встановлення ізоморфізму графів (рис. 2).

Рис. 2. Схема розв'язання задачі

Отже, узагальнений алгоритм встановлення ізоморфізму двох графів буде складатися з таких кроків (процедур):

- класифікація вершин графа за степенями вершин;
- встановлення необхідних умов існування ізоморфізму (за збігом потужностей множин вершин і ребер, а також відповідних класів вершин);
- паралельна редукція графів з покроковою побудовою бінарних дерев редукції (на кожному кроці перевіряється збіг кодів для відповідних проміжних і кореневої вершин);
- при досягненні кореневих вершин з однаковими кодами ізоморфізм графів буде встановлений.

Структура коду порівняння вершин для мультиграфів

Як бачимо, велике значення для інваріанти графа у вигляді зваженого по вершинах бінарного дерева редукції T_G має формування коду (ваги, значення вагової функції) Ex_j для кожної проміжної вершини дерева x_j, включно з кореневою. Збіг кодів Ex_j та $Ex^{'}_j$ для графів G і $G^{'}$ буде свідчити про ізоморфність їхніх відповідних підграфів (кусків), що відповідають проміжним вершинам дерев редукції x_j та $x^{'}_j$. Для мультиграфів, як для найпоширенішої графової моделі, структура коду порівняння пар вершин (рис. 3), що утворюють чергову проміжну або кореневу вершину дерева редукції, буде такою:

- комбінація класів вершин (кусків). Необхідно зауважити, що у ході формування проміжних вершин дерева редукції утворюються, відповідно, нові класи вершин згідно із значеннями їхніх кодів порівняння $E\mathrm{x}_j$;
- кількість простих (початкових, висячих) вершин куска (що відповідають проміжній або кореневій вершинам редукції), які інцидентні ребрам, що стають внутрішніми при об'єднанні двох кусків або висячих вершин графів;
- кількість спільних ребер для двох кусків (вершин), що об'єднуються;
- кортеж класів вершин, інцидентних спільним ребрам;
- кількість зовнішніх ребер куска (інцедентних ребер проміжної вершини), що утворюються;
- кортеж класів вершин, інцидентних зовнішнім ребрам куска, що утворюється.

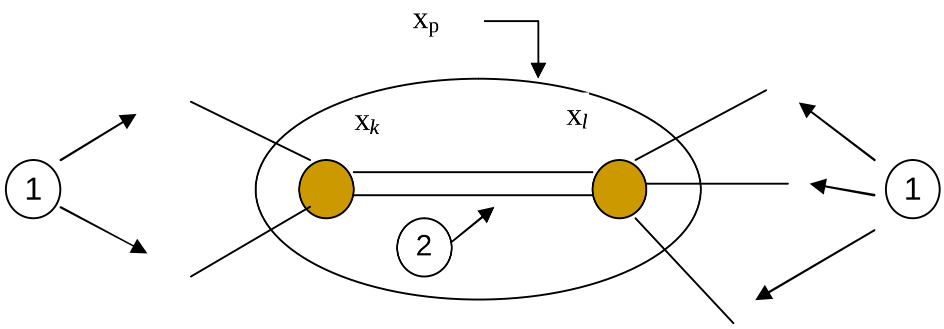


Рис. 3. Стягування пари вершин в процесі редукції в одну (проміжну або кореневу вершину дерева редукції): 1 – зовнішні ребра; 2 – внутрішні ребра $\{x_k, x_l\}$ Þ x_p

За рахунок зміни параметрів цифрового коду (кількості і/або наповнення його компонент e_{xp}, $e_{xp} \in E_{xp}$), можна регулювати швидкодію алгоритму встановлення ізоморфізму графів і достовірність отриманих результатів.

Висновки

Застосування простішої і зручнішої для кодування і реалізації графової моделі схем замість теоретико-множинної [14] може сприяти зменшенню часових втрат при встановленні еквівалентності схем.

1. Татт У. Теория графов. – М.: Мир, 1988. – 424 с. 2. Berge C. Isomorphism problems for hypergraphs // Mathematical centre tracts. – 1974. – 56. – P. 3–12. 3. Corneil D.B., Gotlieb C.C. An efficient algorithm for Graph isomorphism // J. of A.C.M. – 1970. – Vol. 17, No. 1. P. 51–74. 4. Курейчик В.М., Королев А.Г. Об одном алгоритме распознавания изоморфных ориентированных графов. – В кн.: Однородные цифровые вычислительные и интегрирующие структуры, VI, Таганрог, ТРТИ, 1976. – С. 94–102. 5. Харари Ф. Теория графов. – М.: Мир, 1973. – 302 с. 6. Земляченко В.Н., Корниенко Н.М., Тышкевич Р.И. Проблема изоморфизма графов // Теория сложности вычислений, I. Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1982. – Т. 118. – С. 83–158. 7. Кани К., Оцуки Т. Применение теории графов и комбинаторных алгоритмов в автоматизации проектирования // Дзехо сери. – 1975. – Т. 16, № 17. – С. 581–590. (яп.) 8. Proskurowski A. Automatic generation of graphs and graphs identification problem // Technical Report. – april 1974. – N 16. 9. McCarthy M.K., Davida G.J. Invariant features and the graph isomorphism problem // IEEE Syst. Man and Cybern. Soc. Proc. Int. Conf. Cybern and Soc. – Boston, Mass., 1973. – P. 81–85. 10. Рейнгольд Э., Нивергельд Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. – М.: Мир, 1980. – 476 с. 11. Гудман С., Хидетниеми С. Введение в *разработку и анализ алгоритмов. – М.: Мир, 1981. – 368 с. 12. A'Ggel B.R. Al-Zabi, Kernytskyy A., Lobur M., Tkachenko S. On Graph Isomorphism Determining Problem // IEEE MEMSTECH'2008. – Polyana, 2008. – P. 84. 13. Базилевич Р.П., Ткаченко С.П. Решение задачи разбиения методом параллельного свертывания: В кн.: Вычислительная техника, VI. – Каунас: КПИ, 1975. – С. 295–298. 14. Аль-Забі Б., Керницький А.Б., Ткаченко С.П. Встановлення існування необхідних умов еквівалентності схем // Вісн. Нац. ун-ту "Львівська політехніка". – 2007. – № 591: Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика. – С. 87–90.*