УДК 519-7

И.М. Скринник, аспирант, Одесский национальный политехнический университет

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Анотация. В работе рассматривается применение метода стабилизации положения равновесия дискретной системы управления полулинейной обратной связью с запаздыванием [1] к возможности обобщения известных итерационных процессов решения систем линейных и нелинейных уравнений [2].

Ключевые слова: стабилизация положения равновесия, нелинейные динамические системы, итерационные схемы.

Рассмотрим вычислительную схему метода простых итераций (или метода Richardson) решения системы алгебраических уравнений, вообще говоря, комплексных

$$F(x)=0. \tag{1}$$

Для решения системы (1) строится вспомогательная разностная система

$$x_{n+1}=x_n+G(x_n)F(x_n), \tag{2}$$

где $G(x_n)$ – матрица, подлежащая выбору. Положения равновесия системы (2) совпадают с решениями системы (1). В классической схеме простых итераций матрица $G(x_n)$ выбирается из условий принадлежности мультипликаторов положения равновесия системы (1) интервалу $(-1,1)$. Это условие можно ослабить: матрицу $G(x_n)$ следует выбирать так, чтобы мультипликаторы положения равновесия системы (2) были бы вещественными и меньше единицы. Можно взять, например, $G(x_n)=-[F'(x_n)]^*$, где $F'(x)$– матрица Якоби, а знак "*" означает Эрмитово транспонирование. Тогда система (2) примет вид

$$x_{n+1}=x_n-[F'(x_n)]^*F(x_n). \tag{3}$$

Пусть $F(x)=0$. Если матрица $F'(x)$ не вырождена, то матрица $[F'(x)]^*F'(x)$ положительно определенная, то есть все ее собственные значения больше нуля. Следовательно, все собственные значения матрицы $\left(I-[F'(x)]^*F'(x)\right)$, где $\boldsymbol{I}$ – единичная матрица, вещественные и меньше единицы. Пусть эти собственные значения лежат в интервале $(-\hat{m},1)$. Организуем итерационный процесс для системы (3) по схеме [3]:

$$x_{n+1}=\sum_{j=1}^{N}a_j x_{n-j+1}-(1-g)\sum_{j=1}^{N}a_j\left[F'(x_{n-j+1})\right]^*F(x_{n-j+1}), \tag{4}$$

где $0<g<1$, коэффициенты $a_1,\mathbf{K},a_N$ вычисляются по заданным формулам [3].

Итерационный процесс будет сходиться к положению равновесия, если только начальные векторы лежат в области притяжения этого положения равновесия. Отметим, что схему (4) можно заменить аналогичной, более экономной с вычислительной точки зрения [4]

$$\begin{cases}\hat{x}_n=\sum\limits_{j=1}^{N}a_j x_{n-j+1},\\ x_{n+1}=\hat{x}_n-(1-g)[F'(\hat{x}_n)]^*F(\hat{x}_n),\ \ n>N.\end{cases}$$

Если система (1) линейная, то есть $Ax-b=0$, то система (2) примет вид $x_{n+1}=(I-A^*A)x_n+A^*b$, соответственно, система управления (4) –

$$\begin{cases}\hat{x}_n=\sum\limits_{j=1}^{N}a_j x_{n-j+1},\\ x_{n+1}=(I-(1-g)A^*A)\hat{x}_n+(1-g)A^*b,\ \ n>N.\end{cases}$$

В случае, если матрица $\boldsymbol{A}$ симметрическая положительно определенная, итерационная схема упрощается

$$\begin{cases} \hat{x}_n = \sum_{j=1}^{N} a_j x_{n-j+1}, \\ x_{n+1} = \left(I - (1-g)A\right)\hat{x}_n + (1-g)b, \ n > N. \end{cases}$$

Аналогичная схема пригодна и для обращения матриц .

Подобным образом можно модифицировать методы. Например, метод **Seidel** приводится к итерационной схеме

$$\begin{cases} \hat{x}_n = \sum_{j=1}^{N} a_j x_{n-j+1}, \\ (L + \hat{D})x_{n+1} = \left(-U + g\ A\right)\hat{x}_n + (1-g)b, \ n > N. \end{cases}$$

При $\gamma = 0$, $N = 1$ обобщенный метод Seidel совпадает с классическим. Если матрица $\boldsymbol{A}$ симметрическая положительно определенная, то достаточно брать $N = 1$.

В работе, как приложение схемы стабилизации положения равновесия дискретной динамической системы, предложенной в [1], приведен возможный вычислительный алгоритм нахождения решений систем алгебраических уравнений, основанный на модификации известных итерационных схем. В этих схемах используются значения переменных, вычисленные на предыдущих шагах. При этом трудоемкость новых итерационных схем практически не возрастает. Результаты численного решения различных систем линейных и нелинейных уравнений подтверждают это суждение и эффективность применения методов стабилизации положения равновесия для вычислительных процессов.

Литература

1. D. Dmitrishin Finding cycles in nonlinear autonomous discrete dynamical systems / Dmitrishin D., Khamitova A., Stokolos A., Tohaneanu M.. // Harmonic Analysis, Partial Differential Equations, Banach Spaces, and Operator Theory (Volume 2), Springer – 2017. – PP. 199-237.
2. C. T. Kelley Iterative methods for linear and nonlinear equations / Kelley C. T. // *SIAM*, Philadelfia – 1995.
3. D. Dmitrishin Generalization of nonlinear control for nonlinear discrete systems // Dmitrishin D., Stokolos A., Skrynnik I., Franzheva E.. // arXiv preprint arXiv:1709.10410.
4. И.М. Скринник Перемешивание и циклы в нелинейных дискретных системах с хаотической динамикой / Скринник И.М. – Informatics and Mathematics Methods In Simulation Vol.6 – 2016. – PP. 161-172.