УДК 519-7

Е.Д. Франжева, аспирант, Одесский национальный политехнический университет

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДА ОБНАРУЖЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТОЧЕК В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Анотация. В работе рассмотрена проблема обнаружения нестационарных периодических точек нелинейных динамических систем. Предложен новый подход в построении запаздывающей обратной связи. Показана эффективность этого подхода, на основании результатов построенных примеров.

Ключевые слова: хаос, стабилизация циклов, нелинейные динамические системы, периодические орбиты

Явление хаоса в динамических системах исследуется уже на протяжении многих лет, однако интерес к изучению новых систем и методов управления хаосом в них не убывает, а проблемы, касающиеся контроля хаоса до сих пор являются актуальными. Существует множество известных методов обнаружения периодических орбит [1, 2, 3]. В данной работе предлагается использовать метод стабилизации периодических орбит, получивший развитие от метода, предложенного в [4], с использованием глубины предыстории равной 3, с целью обнаружить циклы больших длин по сравнению с предыдущими полученными результатами.

Рассмотрим векторную нелинейную динамическую систему

$$x_{n+1} = f(x_n),\ x_n \in R^m,\ n = 1,2,... \tag{1}$$

Считается, что в этой системе имеется один или несколько нестабильных циклов периода T, $(\eta_1, \mathbf{K}, \eta_T)$ – цикл. Мультипликаторы цикла определяются как корни характеристического уравнения:

$$\det\left(mI - \prod_{i=1}^{T} Df\left(x_i^*\right)\right) = 0\,, \tag{2}$$

где μ – мультипликатор цикла. Считается, что существуют корни, лежащие вне единичного круга, следовательно, цикл системы неустойчив и его обнаружение проблематично. Одно из решений этой задачи связано с введением в (1) управления так, что система (1) переходит в систему:

$$x_{n+1} = f(x_n) + u_n,\ n = 1,2,... \tag{3}$$

О. Моргул в [4] предложил использовать управление в виде:

$$u_n = \varepsilon\left(x_{n-T+1} - f(x_n)\right),\ |\varepsilon| < 1 \tag{4}$$

В данном подходе глубина предыстории равна 1. В работе [5] используется глубина предыстории N=2, что позволило значительно увеличить область локализации мультипликаторов и найти больше циклов малых длин. Будем использовать N=3, с целью найти циклы больших длин, увеличить эффективность управления, используя схему:

$$x_{i+1} = (1-\gamma) f\left(\sum_{j=1}^{N} a_j x_{i-Tj+T}\right) + \gamma \sum b_j x_{i-Tj+1} \tag{5}$$

где a_j, b_j – оптимальные коэффициенты управления, $\sum_{j=1}^{N} b_j = \sum_{j=1}^{N} a_j = 1,\ a_j > 0,\ b_j > 0,\ j = \overline{1,N}$.

Рассмотрим алгоритм построения оптимальных a_j. Определим узлы:

$$\psi_j = \frac{\pi(\sigma + T(2j-1))}{\tau + (N-1)T},\quad j = 1,...,\frac{N-2}{2}\ (N - \text{ четное}),\ \left(\frac{N-1}{2}\ (N - \text{ нечетное})\right).$$

Построим полиномы: $\eta_{2k+1}(z) = z\sum_{j=0}^{2k} c_j(k) z^{2k-j}$, в частности $\eta_1(z) = z$,

$\eta_3(z) = z\left(c_0(1)z^2 + c_1(1)z + c_2(1)\right) = z\left(z^2 - 2\cos\psi_1 + 1\right)$, то есть $c_0(1) = 1,\ c_1(1) = -2\cos\psi_1,\ c_2(1) = 1$.

Найдем коэффициенты для $\eta_{2(k+1)+1}(z) = \eta_{2k+3}(z)$, считаем, что $\eta_{2k+1}(z)$ известны по формулам:

$$c_{-1}(k)=0,\ c_0(k)=0 \tag{6}$$

$$c_s(k+1)=c_s(k)-2c_{s-1}(k)\cos\psi_{k+1}+c_{s-2}(k),\ \ s=1,\dots,2k-1 \tag{7}$$

$$c_{2k}(k)=1,\ c_{2k+1}(k)=c_{2k+2}=0 \tag{8}$$

Последовательно используя формулы (6)-(8), можем построить полиномы в случае $N=2k+1$.

В случае $N=2k+2$, полиномы будут строиться следующим образом:

$$\eta_{2k+2}(z)=z(z+1)\sum_{j=0}^{2k}c_j(k)z^{2k-j}$$

Аналогично, последовательно используя формулы (6)-(8), можем построить полиномы в случае $N=2k+2$. Таким образом, в случае нечетных $N=2k+1$ определим коэффициенты b_j по правилам $b_{j+1}=c_{2k-j}(k),\ j=1,....,2k$, и в случае четных $N=2k+2$: $b_{j+1}=c_{2k-j+1}(k)+c_{2k-j}(k),$ $c_{-1}(k)=c_{2k+1}(k)=0,\ \ j=1,....,2k+2.$

В итоге, оптимальные коэффициенты a_j определяются по формуле:

$$a_j=K\left(1-\frac{1+(j-1)T}{2+(N-1)T}\right)b_j,\ \ j=1,\dots,N, \tag{9}$$

где константа нормализации K определена так, чтобы $\sum_{j=1}^{N}c_j=1$, $K=\dfrac{1}{\sum_{j=1}^{N}\left(1-\frac{1+(j-1)T}{2+(N-1)T}\right)b_j}$

Для сравнения использования N=2 и N=3 в методе стабилизации циклов, предложенном в [5], были проведены компьютерные вычисления с несколькими известными отображениями: HENON, LOZI, IKEDA и т.д.

Благодаря использованию нового алгоритма построения коэффициентов оптимального управления с глубиной предыстории N=3 в отображении HOLMES, получилось найти циклы длин 2, 3, 4, 5, 6, 8, в то время как при N=2, удавалось найти циклы 2, 3, 4, 5; HENON – при N=3, получилось найти циклы длин 2, 4, 6, 7, 8, при N=2 – 2, 4, 6; Lesli-Ferhulst – при N=3, получилось найти циклы длин 2, 3, 4, 8, 9, а при N=2 – 3, 8.

Литература

1. Pyragas K. Continuous control of chaos by self controlling feedback / K. Pyragas // Phys. Rev. Lett. A 170 – 1992 – P. 421–428.

2. Vieira de S. M. Controlling chaos using nonlinear feedback with delay / S. M. Vieira de, A. J. Lichtenberg // Phys. Rev. E 54 – 1996 – P. 1200–1207.

3. Morgul O. Further stability results for a generalization of delayed feedback control / O. Morgul // Nonlinear Dynamics, 1-8 – 2012.

4. Дмитришин Д. Обобщение нелинейного управления для нелинейных дискретных систем / Д. Дмитришин, А. Стоколос, И. Скрынник, Е. Франжева // Вестник НТУ «ХПИ». Серия: Системный анализ, управление и информационные технологии. – Харків : НТУ «ХПИ», 2017. – No 28 (1250). – С. 3–18.

5. Franzheva E. Optimization of parameters in self-organizating systems / E.D. Franzheva // Informatics and Mathematical Methods in Simulation. Vol. 6 – 2016. – No. 3. – P. 280-289.