

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ОРНШТЕЙНА-УЛЕНБЕКА

Анотация. Алгоритмы генерации случайного гармонического процесса используются при моделировании движения транспортных средств и при рассмотрении других задач, при решении которых требуется применение стохастического гармонического процесса Орнштейна-Уленбека. В работе проведено статистическое обоснование и построен числовой алгоритм, позволяющий генерировать последовательности случайных реализаций отсчетов стохастического гармонического процесса Орнштейна-Уленбека. Предложенный алгоритм проиллюстрирован результатами моделирования.

Ключові слова: случайный процесс, гармонический процесс, процесс Орнштейна-Уленбека, генерация гармонических случайных процессов, компьютерное моделирование гармонических стохастических процессов.

Во многих задачах компьютерного моделирования и математической статистики рассматриваются, в частности, случайные процессы различных типов. Алгоритмы решения задач компьютерного моделирования и математической статистики часто требуют использования случайных процессов или полей с необходимыми свойствами для конкретного случая [1]. Физические явления, описываемые гармоническими процессами, встречаются в природных или технических задачах очень часто. Так, например, в задачах моделирования движения транспортных средств по возмущенной поверхности, требуется рассматривать случайные процессы, порядок которых выше первого [2]. И в этих задачах моделирования необходимо задавать не только профиль рельефа, но и пространственную производную рельефа по направлению движения.

В связи с этим возникает задача о создании алгоритмов, дающих возможность синтезировать последовательность случайных значений, вероятностные свойства которых описываются в терминах случайного процесса второго порядка – стохастического гармонического процесса. Поскольку соответствующий процесс первого порядка принято называть процессом Орнштейна-Уленбека (ОУ-процесс) [3], в работе этот же термин использоваться для гармонического процесса второго порядка.

Целью работы является, таким образом, создание и описание алгоритма, в результате работы которого получается последовательность случайных значений, вероятностные свойства которых описываются в терминах случайного ОУ-процесса второго порядка.

Уравнение движения (1) может быть взято за основу при анализе стохастических процессов. Для ОУ-процесса первого порядка динамическое уравнение на оси следующее:

$$\frac{dh(x)}{dx} + \nu h(x) = u(x), \quad h(0) = u_0, \quad (1)$$

где $u(x)$ – белый шум с нулевым математическим ожиданием и интенсивностью σ_U , ν – декремент затухания. Начальным условием к уравнению (1) служит случайная величина $h_0 = h(0)$, подчиняющаяся нормальному закону

$$f_H(h_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{H_0}} \exp\left(-\frac{h_0^2}{2\sigma_{H_0}^2}\right), \quad -\infty < h_0 < \infty \quad (2)$$

с дисперсией $\sigma_{H_0}^2$

Гармонический процесс Орнштейна-Уленбека. Уравнение движения (1) может быть взято за основу при анализе. Естественным расширением (1) для получения гармонического ОУ-процесса является повышение порядка дифференциального уравнения движения:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + 2\beta\frac{d}{dx} + \Omega^2\right)h(x) = u(x), \quad (3)$$

$$h(0) = h_0, \quad h'(0) = h'_0, \quad (4)$$

где $u(x)$ – белый шум с нулевым математическим ожиданием и интенсивностью σ_u , β – декремент затухания, Ω – собственная частота.

Начальным условием к уравнению (4) служат случайные величины $h(0)$ и $h'(0)$. Запишем уравнение (3) в факторизованном виде:

$$\left(\frac{d}{dx} + \gamma_1\right)f(x) = u(x), \quad \left(\frac{d}{dx} + \gamma_2\right)h(x) = f(x), \quad (5)$$

где $f(x)$ – вспомогательная функция, g_1 и g_2 – постоянные, вытекающие из (3). Начальное условие для неё следует из первого уравнения (5) и имеет вид $f(0) = h'(0) + \gamma_1 h(0)$.

На основании системы (5) можно построить числовой алгоритм генерации для пары функций $\{h(x), f(x)\}$, а затем получить двухкомпонентный гармонический ОУ-процесс $\{h(x), h'(x)\}$ после замены $h'(x) = f(x) - \gamma_1 h(x)$. Этот алгоритм будет иерархическим алгоритмом генерации значений компонент процесса в узлах на оси $0x$ в интервале $(0 \leq x \leq a)$.

Из теории колебательных систем известно, что тип движения определяется соотношением между декрементом β и частотой колебательной системы Ω . При этом возможны три случая: $\beta < \Omega$ – колебательный тип; $\beta = \Omega$ – аperiodический тип; $\beta > \Omega$ – затухающий тип движения.

В задачах моделирования движения транспортного средства по возмущенной поверхности необходимо задавать не только профиль рельефа $h(x)$, но и пространственную производную $h'(x)$ рельефа по направлению движения. В работе показаны зависимости функции $h'(x)$ для случаев: колебательного, аperiodического и затухающего движения. Можно отметить, что в случае $\beta > \Omega$ движение не имеет чисто затухающего характера, поскольку ОУ-процесс $h(x)$ возбуждается белым шумом.

В работе проведено статистическое обоснование и построен числовой алгоритм, дающий возможность генерировать последовательности случайных реализаций отсчетов стохастического гармонического ОУ-процесса. На основании численного алгоритма можно построить гармонический ОУ-процесс с различными параметрами.

Література

1. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. Москва. Сов. Радио. 1977. 488 с.
2. Uhlenbeck G.E., Ornstein L.S. On the theory of Brownian Motion. Physical Review. 1930. № 36. P. 823-841.
3. Хусу А.П., Витенберг Ю.Р., Пальмов В.А. Шероховатость поверхностей. Москва. Наука. 1975. 344 с.
4. Александрова Т.Е., Мазманишвили А.С., Сидоренко А.Ю. Имитационное моделирование случайных возмущений при решении задач параметрического синтеза танковых информационно-управляющих систем. Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології. Харків : НТУ «ХПІ». 2016. № 59 (1168). С. 17–22.