

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ КАСКАДУ “ПЕРЕТВОРЮВАЧ КІЛЬКОСТІ ФАЗ – ТРИФАЗНИЙ ОДНОПІВПЕРІОДНИЙ ВИПРЯМЛЯЧ”

© Уляна Дзелендзяк, Андрій Павельчак, Володимир Самотий, 2009

Національний університет “Львівська політехніка”, кафедра комп’ютеризованих систем автоматики,  
вул. С. Бандери, 12, Львів, Україна

*Наведено математичну модель каскаду “перетворювач кількості фаз – трифазний однопівперіодний випрямляч”, а також запропоновано метод аналізу перехідних й усталених режимів його роботи.*

*Приведена математическая модель каскада “преобразователь числа фаз – трехфазный однополупериодный выпрямитель”, а также предложен метод анализа переходных и установившихся режимов его работы.*

*Mathematical model of the cascade “the converter of number of phases – three-phase half-wave rectifier” is resulted and method for transient and steady-state analysis of its operational modes is suggested.*

**Вступ.** Сучасні вимоги до проектування та експлуатації електромагнетних перетворювачів потребують комплексного підходу до розв’язування задач аналізу та синтезу таких пристроїв. Це пов’язано з нелінійністю характеристик складових елементів таких перетворювачів, що значно ускладнює аналіз їхніх режимів. На основі рівнянь динаміки пристрою числові методи розв’язування систем нелінійних диференціальних рівнянь дають можливість виконати аналіз перехідних процесів за заданих початкових умов. Для аналізу усталених процесів необхідно визначити початкові умови, які задовольняють умову періодичності. Проте, незважаючи на достатньо розвинуті теорії електромагнетних кіл та вентиляльних перетворювачів, сьогодні існують проблеми під час аналізу перехідних й усталених режимів роботи цих пристроїв. Зокрема, відсутні оптимальні з погляду обсягу обчислень методи, які б одночасно враховували електромагнетні зв’язки і комутаційні процеси вентиляльних перетворювачів, тому завдання розроблення методу аналізу динаміки їх роботи є актуальним.

**1. Аналіз публікацій.** Для аналізу перехідних й усталених процесів електромагнетних пристроїв з керованими і некерованими напівпровідниковими вентилями необхідно створити адекватну математичну модель досліджуваного об’єкта. Тому розглянемо наявні моделі таких пристроїв та методи аналізу динаміки їх роботи.

Сучасна методика аналізу режимів роботи нелінійних електромагнетних пристроїв, орієнтована на

використання явних методів числового інтегрування, викладена в роботі [6]. Коефіцієнтами рівнянь динаміки є статичні та диференціальні магнетні опори, які є функціями магнетних потоків віток. У [4] для аналізу перехідних процесів застосовується метод відображення на комплексну площину, але він не враховує внутрішніх опорів ключових елементів. Розрахунок перехідного процесу трифазного однопівперіодного випрямляча з використанням неявного методу Ейлера описаний у роботі [5]. Для аналізу усталених процесів використовують методи гармонічного балансу [2], Ейпріла–Трика та екстраполяційні методи [7].

Для моделювання напівпровідникових вентилів найчастіше застосовують два підходи: вентиль розглядається як певна електрична ланка зі змінними параметрами [1] або моделюють його ідеальним ключем [3].

**3. Рівняння динаміки каскаду.** Перетворювач кількості фаз, який виконує перетворення однофазної напруги на трифазну, можна побудувати, використавши трифазний трансформатор з тристержневим магнетопровідником та з’єднавши у певний спосіб первинні обмотки фаз. Розглянемо рівняння стану такого перетворювача, обмотки якого з’єднані за схемою Терьохіна. З’єднання обмоток трансформатора  $\Delta/Y$  з нульовим провідником на виході та активно-індуктивним навантаженням. Принципова схема такого перетворювача подана на рис. 1.

Трифазний однопівперіодний випрямляч реалізується на трьох вентилях, а навантаження вмикається

в нульовому провіднику (рис. 1). Вихідний сигнал у цій схемі в усталеному режимі буде визначатися співвідношенням

$$u_{\text{ВИХ}} = \max(u_{2A}, u_{2B}, u_{2C}). \quad (1)$$

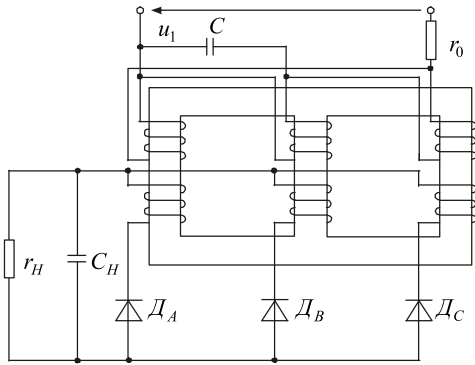


Рис. 1. Принципова схема каскаду

Розглянемо рівняння динаміки трифазного однопівперіодного випрямляча, що працює на активне навантаження. Параметри вторинної обмотки вважаємо приведені за кількістю витків до первинної. По суті, рівняння трифазного однопівперіодного випрямляча зводяться до рівнянь трифазного трансформатора з нульовим провідником, через який протікає струм навантаження. Для запису рівнянь стану необхідно визначити загальну кількість комбінацій відкритих і закритих вентилів, записати рівняння для кожної комбінації і з допомогою додаткових логічних змінних узагальнити їх до однієї системи алгебро-диференціальних рівнянь.

У цій схемі можлива доволі значна кількість таких комбінацій. Необхідно перебрати всі варіанти, коли відкритими є один або два вентилі. Отже, існують три комбінації, коли відкритим залишається один вентиль, а також три комбінації, коли відкриті два вентилі, а саме: 1)  $T_A$  – відкритий,  $T_B, T_C$  – закриті; 2)  $T_B$  – відкритий,  $T_A, T_C$  – закриті; 3)  $T_C$  – відкритий,  $T_A, T_B$  – закриті; 4)  $T_B, T_C$  – відкриті,  $T_A$  – закритий; 5)  $T_A, T_C$  – відкриті,  $T_B$  – закритий; 6)  $T_A, T_B$  – відкриті,  $T_C$  – закритий. Можлива ще сьома комбінація, коли всі вентилі закриті. Закривання того чи іншого вентиля буде призводити до обриву відповідної фази. При виведенні рівнянь динаміки обриву фаз можна промодельовувати, прирівнявши до нуля обернену індуктивність розсіяння відповідної фази, або помноживши її на додаткову логічну змінну, що набуває значень 0, 1. Можна зробити висновок, що

немає необхідності для цього перетворювача записувати рівняння всіх комбінацій відкритих і закритих вентилів. Достатньо записати рівняння для випадку, коли всі вентилі відкриті.

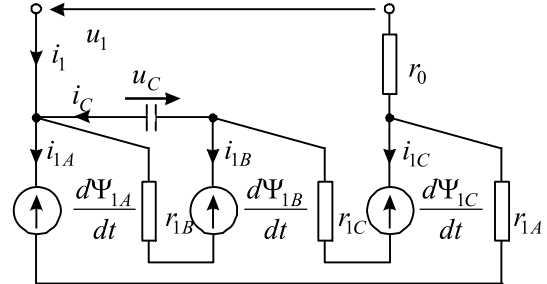


Рис. 2. Розрахункова схема контурів живлення

Рівняння електромагнетного стану перетворювача кількості фаз зводяться до рівнянь трифазного трансформатора, дві фази якого живляться через фазозсуваючий конденсатор, а третя безпосередньо ввімкнена на напругу живлення  $u_1$ . Параметри вторинної обмотки вважаємо приведені за кількістю витків до первинної.

Згідно з розрахунковою схемою контурів живлення (рис. 2) рівняння обмоток первинної сторони трансформатора будуть

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Psi_{1A}}{dt} &= u_1 - r_{1A}i_{1A} - r_0i_1, \\ \frac{d\Psi_{1B}}{dt} &= u_C - r_{1B}i_{1B}, \\ \frac{d\Psi_{1C}}{dt} &= -u_1 - u_C - r_{1C}i_{1C} + r_0i_1, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

де  $\Psi_{1j}$ ,  $i_{1j}$ ,  $r_{1j}$  – відповідно повні потокозчеплення, струми та активні опори фаз первинних обмоток ( $j = A, B, C$ );  $u_C$  – напруга на фазозсуваючому конденсаторі;  $i_1$  – струм живлення;  $r_0$  – внутрішній опір джерела живлення.

Згідно з першим законом Кірхгофа струм живлення  $i_1$  можна записати через фазні струми, а саме

$$i_1 = i_{1A} - i_{1C}, \quad (3)$$

тоді рівняння (2) набудуть вигляду

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Psi_{1A}}{dt} &= u_1 - (r_{1A} + r_0)i_{1A} + r_0i_{1C}, \\ \frac{d\Psi_{1B}}{dt} &= u_C - r_{1B}i_{1B}, \\ \frac{d\Psi_{1C}}{dt} &= -u_1 - u_C - (r_{1C} + r_0)i_{1C} + r_0i_{1A}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Отримані рівняння можна записати у матричному вигляді

$$\frac{d\Psi_1}{dt} = H_1 u_1 + H_C u_C - R_1 I_1, \quad (5)$$

де  $\Psi_1 = (\Psi_{1A}, \Psi_{1B}, \Psi_{1C})^T$ ,  $I_1 = (i_{1A}, i_{1B}, i_{1C})^T$  – матриці-стовпчики повних поточкозчеплень і струмів фаз первинної

сторони трансформатора;  $H_1 = (1, 0, -1)^T$ ,  $H_C = (0, 1, -1)^T$  – структурні матриці;  $R_1$  – матриця опорів первинної сторони

$$R_1 = \begin{bmatrix} r_{1A} + r_0 & & -r_0 \\ & r_{1B} & \\ -r_0 & & r_{1C} + r_0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

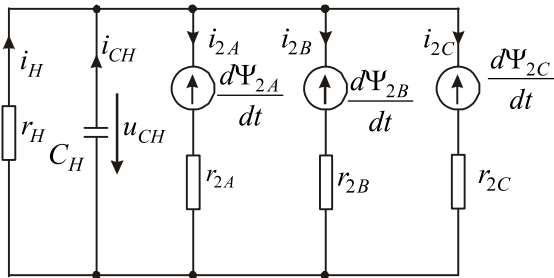


Рис. 3. Розрахункова схема контурів навантаження

Тоді згідно з розрахунковою схемою контурів навантаження рис. 3 рівняння обмоток вторинної сторони трансформатора будуть

$$\frac{d\Psi_2}{dt} = -H_C u_{CH} - R_2 I_2, \quad (7)$$

де  $\Psi_2 = (\Psi_{2A}, \Psi_{2B}, \Psi_{2C})^T$  – матриці-стовпчики повних поточкозчеплень фаз вторинної сторони трансформатора;  $I_2 = (i_{2A}, i_{2B}, i_{2C})^T$  – матриці-стовпчики струмів фаз вторинної сторони трансформатора;  $R_2 = \text{diag}(r_{2A}, r_{2B}, r_{2C})$  – діагональна матриця опорів вторинних обмоток.

Згідно із схемою (рис. 2) можна записати рівняння конденсатора

$$\frac{du_C}{dt} = -C^{-1} H_C^T I_1, \quad (8)$$

де  $C$  – ємність конденсатора.

Розрахункова схема магнетного кола наведена на рис. 4, згідно з нею запишемо рівняння стану у матричному вигляді

$$I_1 + I_2 = \alpha' \psi + \alpha_0 E_0 \psi, \quad (9)$$

де  $\alpha_0$  – обернена індуктивність розсіяння нульової послідовності трансформатора;  $E_0$  – квадратна матриця розмірністю  $3 \times 3$ , всі елементи якої дорівнюють

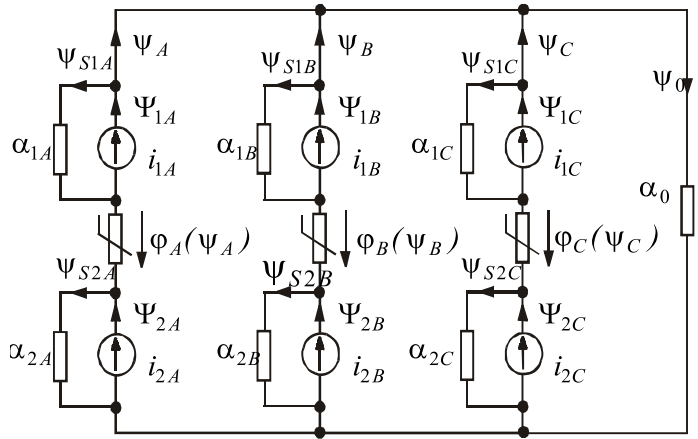


Рис. 4. Розрахункова схема магнетного кола трансформатора

одиниці;  $\psi = (\psi_A, \psi_B, \psi_C)^T$  – матриця-стовпчик робочих поточкозчеплень фаз;  $\alpha' = \text{diag}(\alpha'_A, \alpha'_B, \alpha'_C)$  – діагональна матриця обернених статичних індуктивностей фаз, які визначаємо основними за кривими намагнення

$$\alpha'_j = \frac{\varphi_j(\psi_j)}{\psi_j} = \alpha'_j(\psi_j), \quad j = A, B, C. \quad (10)$$

Згідно з рис. 4 можна для контурів розсіяння записати рівняння струмів

$$I_1 = \alpha_1 (\Psi_1 - \psi), \quad I_2 = K \alpha_2 (\Psi_2 - \psi). \quad (11)$$

де  $\alpha_1 = \text{diag}(\alpha_{1A}, \alpha_{1B}, \alpha_{1C})$  – діагональна матриця обернених індуктивностей розсіяння первинних обмоток трансформатора;  $\alpha_2 = \text{diag}(\alpha_{2A}, \alpha_{2B}, \alpha_{2C})$  – діагональна матриця обернених індуктивностей розсіяння вторинних обмоток трансформатора;  $K = \text{diag}(k_A, k_B, k_C)$  – діагональна матриця додаткових логічних змінних, що набувають значень 0, 1. Підставимо (11) в (9)

$$\alpha_1 (\Psi_1 - \psi) + K \alpha_2 (\Psi_2 - \psi) = \alpha' \psi + \alpha_0 E_0 \psi. \quad (12)$$

Продиференціюємо (12) за часом

$$\alpha_1 \frac{d\Psi_1}{dt} - \alpha_1 \frac{d\psi}{dt} + K \alpha_2 \frac{d\Psi_2}{dt} - K \alpha_2 \frac{d\psi}{dt} = \alpha' \frac{d\psi}{dt} + \alpha_0 E_0 \frac{d\psi}{dt}, \quad (13)$$

Звівши подібні члени, отримаємо

$$(\alpha'' + \alpha_0 E_0 + \alpha_1 + K\alpha_2) \frac{d\psi}{dt} = \alpha_1 \frac{d\Psi_1}{dt} + K\alpha_2 \frac{d\Psi_2}{dt}. \quad (14)$$

Рівняння (14) запишемо в нормальній формі Коші

$$\frac{d\psi}{dt} = D_1 \frac{d\Psi_1}{dt} + D_2 \frac{d\Psi_2}{dt}, \quad (15)$$

де  $D_1 = G\alpha_1$ ,  $D_2 = GK\alpha_2$ ,  $G = (\alpha'' + \alpha_0 E_0 + \alpha_1 + K\alpha_2)^{-1}$ .

Струми первинної обмотки можна визначити аналітично згідно з рівнянням (9)

$$I_1 = \alpha' \psi + \alpha_0 E_0 \psi - I_2. \quad (16)$$

Для струмів навантаження необхідно записати диференціальні рівняння. Для цього продиференціюємо за часом друге рівняння (11)

$$\frac{dI_2}{dt} = K\alpha_2 \left( \frac{d\Psi_2}{dt} - \frac{d\psi}{dt} \right). \quad (17)$$

Підставивши (15) в (17), одержимо рівняння струмів навантаження в нормальній формі Коші

$$\frac{dI_2}{dt} = A_{21} \frac{d\Psi_1}{dt} + A_{22} \frac{d\Psi_2}{dt}, \quad (18)$$

де  $A_{21} = -K\alpha_2 D_1$ ,  $A_{22} = K\alpha_2 (E - D_2)$ ;  $E$  – одинична матриця.

Рівняння обмоток (5), (7) запишемо одним матричним виразом

$$\frac{d\Psi}{dt} = U - RI, \quad (19)$$

де  $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$  – матриця-стовпчик повних поточних потокосцеплень обмоток;  $U = (H_1 u_1 + H_C u_C, 0)^T$  – матриця-стовпчик напруг;  $R = \text{diag}(R_1, R_2)$  – діагональна матриця опорів;  $I = (I_1, I_2)^T$  – матриця-стовпчик струмів обмоток.

Рівняння (15), (18) з урахуванням позначень (19) запишемо у вигляді

$$\frac{d\psi}{dt} = D(U - RI), \quad (20)$$

$$\frac{dI_2}{dt} = A_2(U - RI), \quad (21)$$

де  $D = (D_1, D_2)$ ;  $A_2 = (A_{21}, A_{22})$ .

Рівняння стану залишилось доповнити рівнянням конденсатора навантаження

$$\frac{du_{CH}}{dt} = C^{-1} (H_C^T I_2 - u_{CH} / r_H). \quad (22)$$

Тоді рівняння (20), (21), (8), (22) можна записати одним матричним рівнянням

$$\frac{dX}{dt} = BZ(t), \quad (23)$$

де  $X = (\psi, I_2, u_C, u_{CH})^T$  – вектор змінних стану;

$B = \text{diag}(M, C^{-1}, C^{-1})$  – матриця коефіцієнтів,

причому  $M = (D, A_2)^T$ ;  $Z(t) = (U - RI, -H_C^T I_1,$

$H_C^T I_2 - u_{CH} / r_H)^T$  – вектор часових функцій. Змінюючи поточний час та розв'язуючи (23), отримуємо розрахунок перехідного процесу. Умови відкривання і закриття клапанів визначаються так. Якщо клапан  $j$ -ї фази відкритий, то перевіряємо умову:

$$1) \text{ якщо } i_{2j} = 0 \text{ і } \frac{di_{2j}}{dt} < 0,$$

тоді присвоюємо  $k_j = 0$ . (24)

Умова (24) є умовою закриття клапана  $j$ . Якщо клапан  $j$ -ї фази закритий, то перевіряємо умову:

$$2) -\frac{d\psi_j}{dt} - u_{CH} > 0, \text{ тоді присвоюємо } k_j = 1. \quad (25)$$

Умова (25) є умовою відкривання клапана  $j$ .

### 3. Результати аналізу усталених режимів.

Аналіз усталених режимів каскаду “перетворювач кількості фаз – трифазний однопівперіодний випрямляч” здійснювався екстраполяційним методом з використанням  $\epsilon$ -алгоритму. У розрахунках були використані такі значення параметрів трансформатора: активні опори первинних обмоток  $r_{1A} = r_{1B} = r_{1C} = 1.1$  Ом; активні опори вторинних обмоток  $r_{2A} = r_{2B} = r_{2C} = 2.0$  Ом; обернені індуктивності розсіяння первинних обмоток  $\alpha_{1A} = \alpha_{1B} = \alpha_{1C} = 172$  Гн<sup>-1</sup>; обернені індуктивності розсіяння вторинних обмоток  $\alpha_{2A} = \alpha_{2B} = \alpha_{2C} = 203$  Гн<sup>-1</sup>; обернена індуктивність розсіяння нульової послідовності  $\alpha_0 = 120$  Гн<sup>-1</sup>. Крива намагнення апроксимована кубічним сплайном. Розрахунки були виконані для двох значень опору навантаження:  $r_{H1} = 1$  Ом,  $r_{H2} = 15$  Ом. Напряга живлення визначалась за формулою  $u_1 = U_M \sin(\omega t)$ , де  $U_M = 311$  В,  $\omega = 314.1593$  рад/с. На рис. 5, а наведено розрахункові криві струмів вторинної обмотки трансформатора при навантаженні  $r_{H1} = 1$  Ом. Наявність напівпровідникових клапанів забезпечує проходження струму лише в додатному напрямку, а в моменти часу, коли клапани закриті, струми дорівнюють нулю. Як видно з рисунка, максимальну амплітуду має струм фази А, що приблизно дорівнює 48 А. Найменша амплітуда в фазі С – 26 А.

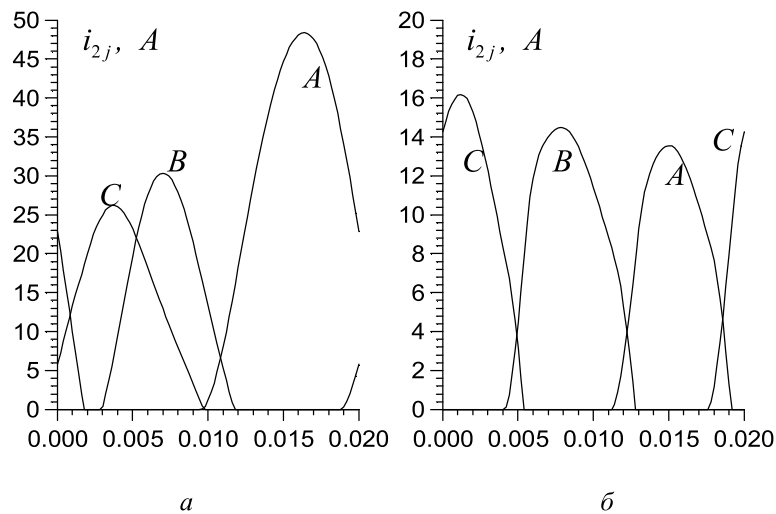


Рис.5. Розрахункові криві ustalених значень струмів вторинної сторони трансформатора для різних значень опору навантаження: а –  $r_{H1}=1$  Ом, б –  $r_{H2}=15$  Ом

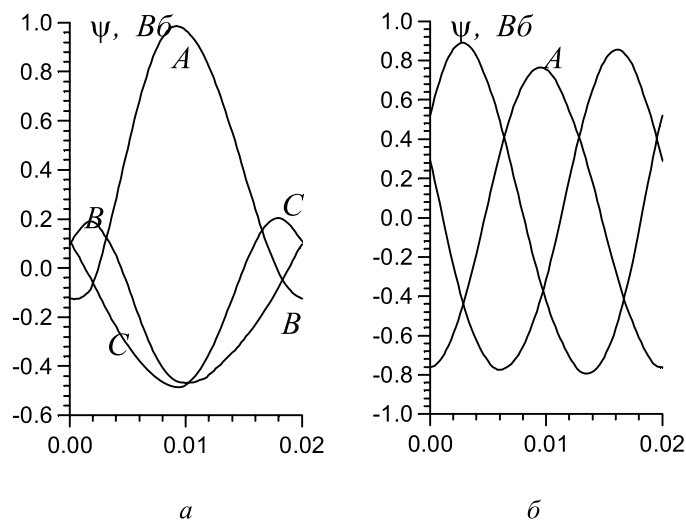


Рис. 6. Розрахункові криві ustalених значень робочих потокозчеплень фаз трансформатора для різних значень опору навантаження: а –  $r_{H1}=1$  Ом, б –  $r_{H2}=15$  Ом

На рис. 5, б наведено розрахункові криві струмів фаз вторинної обмотки трансформатора при навантаженні  $r_{H2} = 15$  Ом. У цьому режимі амплітуди струмів вторинної обмотки є максимально близькими до цілковитої симетрії як за амплітудою, так і за фазою. Враховуючи, що амплітуда струму фази А наближено дорівнює 13.5 А, фази В – 14.5 А, фази С – 16 А, то їх різниці становлять приблизно 10 %.

На рис. 6 наведено розрахункові криві ustalених значень робочих потокозчеплень фаз трансформатора для різних значень опору навантаження. Режим, який є близьким до короткого замикання  $r_{H1} = 1$  Ом, наведено

на рис. 6, а, при номінальному опорі  $r_{H2} = 15$  Ом наведено на рис. 6, б. Перший режим (рис. 6, а) характеризується сильною несиметрією амплітуд і фаз потокозчеплень. Максимальна амплітуда спостерігається у фазі А, а в фазах В і С вони майже однакові. Другий режим (рис. 6, б) є майже ідеальним в розумінні симетрії робочих потокозчеплень окремих фаз як за амплітудою, так і за фазою.

На рис. 7 наведено розрахункові криві ustalених значень напруг навантаження. Режиму, який є близьким до короткого замикання  $r_{H1} = 1$  Ом, відповідає крива 1, крива 2 відповідає режиму при номінальному опорі  $r_{H2} = 15$  Ом, який є найоптимальнішим.

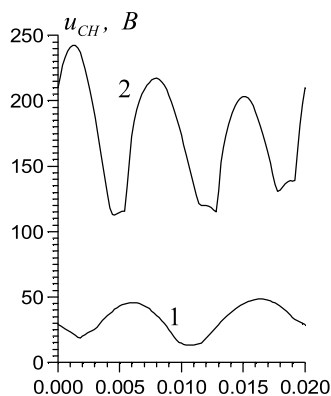


Рис. 7. Розрахункові криві ustalених значень напруг навантаження: 1 –  $r_{H1}=1$  Ом, 2 –  $r_{H2}=15$  Ом

**4. Висновок.** Запропоновано алгоритм аналізу динаміки роботи каскаду “перетворювач кількості фаз – трифазний однопівперіодний випрямляч”, орієнтований на явні методи числового інтегрування. Характерною рисою запропонованого алгоритму є моделювання напівпровідникових вентилів за схемою ідеального ключа. У рівняннях динаміки робота вентилів відображена додатковими логічними змінними, що набувають значень 0, 1. Це значно спрощує алгоритм аналізу та зменшує обсяг обчислювальних операцій.

1. Бондаренко В.М. Методы и алгоритмы анализа статических и динамических режимов нелинейных цепей. – Киев, 1974. – 105 с. (Препринт /АН УССР Ин-т электродинамики, № 66). 2. Глухивский Л. И. Расчет периодических процессов электротехнических устройств. – Львов: Вища школа, 1984. – 164 с. 3. Мерабишвили П.Ф., Случанко Е.И. Исследование переходных и установившихся процессов в трехфазных мостовых выпрямителях с помощью коммутационных функций // *Электричество*. – 1973. – № 4. – С. 21–26. 4. Миланч Т.В. Исследование переходных процессов в цепях, питающихся от управляемых выпрямителей // *Технічна електродинаміка. Системи електроживлення електротехнічних установок і комплексів*. – 1999 – С. 61–62. 5. Самотий В.В., Дзелендзяк У.Ю. Дискретна математична модель трифазного однопівперіодного випрямляча // *Вісник ВПІ*. – 2005. – № 5 – С. 67–71. 6. Чабан В.И. Основы теории переходных процессов электромашиных систем. – Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1980. – 200 с. 7. Чабан В.И., Самотий В.В. Применение экстраполяционного метода в задачах ускоренного поиска стационарных процессов электромагнитных устройств // *Изв. вузов. Электромеханика*. – 1987. – № 8. – С. 13–17.

УДК 681.2.08

## ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОХИБОК ВИМІРЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ВИСОКООМНИХ ТРИКОМПОНЕНТНИХ КОМПЛЕКСНИХ ОПОРІВ МЕТОДОМ ЗМІЩЕННЯ СИСТЕМИ КООРДИНАТ ЗА НАПРУГОЮ

© Микола Грибок, Марія Прач, 2009

Національний університет “Львівська політехніка”, кафедра інформаційно-вимірювальних технологій,  
вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна

*На основі математичної моделі вимірювального кола за допомогою імітаційного моделювання одержано залежності похибок вимірювання RLC-параметрів від впливаючих факторів.*

*Исходя из математической модели измерительной цепи путем имитационного моделирования получены зависимости погрешностей измерения RLC- параметров от влияющих факторов.*

*On the basis of mathematical model of measuring circle by an imitation design dependences of errors of measuring of RLC-parameters are got on influences.*

**1. Вступ.** Параметри трикомпонентних комплексних опорів відповідають певним якісним характеристикам об’єкта досліджень. Для вимірювання цих параметрів розроблено методи [1, 2, 3], що основані на

здійсненні аналого-цифрових перетворень на кількох частотах. Із зміною частоти часто досліджуваній імпланс об’єкта досліджень стає співмірним із вхідним імпедансом аналого-цифрового перетворювача АЦП. А