УМОВИ ВПОРЯДКУВАННЯ СКАЛЯРНИХ ДОБУТКІВ

Ільків В.С., д. ф.-м. н. проф.
Національний університет «Львівська політехніка», Львів

У деяких задачах мінімізації (наприклад, для синтезу [1, с. 230] оптимальних моделей вимірювання), багатоточкових задач [2] для рівнянь з частинними похідними є проблеми оптимального впорядкування скалярних добутків дійсних векторів зі скінченновимірних та нескінченновимірних просторів, компоненти яких переставлені у довільний спосіб. Зокрема, для двох векторів $\vec{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ та $\vec{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ із простору $\mathbb{R}^{n+1}$ з упорядкованими координатами ($x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_n$, $y_0 \le y_1 \le \ldots \le y_n$) справджуються такі нерівності: $A \le \sum_{i=0}^{n} x_{\alpha_i} y_{\beta_i} \le B$, де $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ і $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ – перестановки множини індексів $\{0, 1, \ldots, n\}$, $B = (\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i$ – скалярний добуток, $A = \sum_{i=0}^{n} x_i y_{n-i}$. Очевидно достатньо переставляти лише координати вектора $\vec{y}$, тобто розглядати $n!$ сум $\sum_{i=0}^{n} x_i y_{\beta_i}$, дві з яких дорівнюють A та B, причому $A \le B$, а інші суми, взагалі, не порівнюються між собою, зокрема $\sum_{i=0}^{n} x_i y_{\beta_i} \ge \sum_{i=0}^{n} x_i y_{\alpha_i}$ для деяких векторів $\vec{x}$, а для інших виконується протилежна нерівність. Встановлено необхідні і достатні умови на перестановку $\vec{y}^{\alpha} = (y_{\alpha_0}, y_{\alpha_1}, \ldots, y_{\alpha_n})$ та перестановку $\vec{y}^{\beta} = (y_{\beta_0}, y_{\beta_1}, \ldots, y_{\beta_n})$ вектора $\vec{y}$, за яких нерівність $(\vec{x}, \vec{y}^{\alpha}) \ge (\vec{x}, \vec{y}^{\beta})$ виконується для всіх векторів $\vec{x}$ з упорядкованими (зростаючими) координатами. Остання нерівність випливає з відповідної загальної леми.

Лема. Нехай $v_j = y_{n-j} + \ldots + y_n$, $w_j = z_{n-j} + \ldots + z_n$, де $j = 0, 1, \ldots, n$, $\vec{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$, $\vec{z} = (z_0, z_1, \ldots, z_n)$, тоді для довільного вектора $\vec{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ з умовою $x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_n$ справджується нерівність $(\vec{x}, \vec{y}) \ge (\vec{x}, \vec{z})$ тоді і тільки тоді, коли $v_n = w_n$ і $v_{j-1} \ge w_{j-1}$ для $j = 1, \ldots, n$. Якщо додатково $\Delta = \min_{j=1,\ldots,n}(x_j - x_{j-1})$, то справджується сильніша (точніша) нерівність $(\vec{x}, \vec{y}) \ge (\vec{x}, \vec{z}) + \Delta \cdot \sum_{j=1}^{n} (v_{j-1} - w_{j-1})$.

1. Пытьев Ю. П. Математические методы интерпретации эксперимента. – М.: Высшая школа. – 1969. – 351 с.
2. Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними. – К.: Наукова думка, 2002. – 416 с.