НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ У НЕОБМЕЖЕНІЙ СМУЗІ

Волянська І.І.[1]; Ільків В.С.[1], д.ф.-м.н., проф.;
Симотюк М. М.[2], к.ф.-м.н., с.н.с.
[1]Національний університет «Львівська політехніка», Львів,
[2]Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Нехай $\boldsymbol{H}_\alpha$, $\alpha \ge 0$, – класичний простір Соболєва, який складається з таких функцій $\varphi \in \boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{R})$, для яких $(1+\xi^2)^{\alpha/2}\hat{\varphi}(\xi) \in \boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{R})$, де $\hat{\varphi}(\xi)$ – перетворення Фур'є функції $\varphi(\boldsymbol{x})$. Норму в просторі $\boldsymbol{H}_\alpha$ визначимо рівністю $\| \varphi(\boldsymbol{x}); \boldsymbol{H}_\alpha \| = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{\boldsymbol{R}} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 (1+\xi^2)^\alpha \boldsymbol{d}\xi}$. Через $\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{n}}([0,\boldsymbol{T}];\boldsymbol{H}_\alpha)$, $\alpha \ge \boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}$, позначимо простір таких функцій $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})$, що похідні $\partial^{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})/\partial \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{r}}$, $\boldsymbol{r} = 0,1,\mathbf{K},\boldsymbol{n}$, для кожного $\boldsymbol{t} \in [0,\boldsymbol{T}]$ належать до простору $\boldsymbol{H}_{\alpha-\boldsymbol{r}}$ і неперервні на $[0,\boldsymbol{T}]$ за змінною $\boldsymbol{t}$ у цих просторах. Норму в просторі $\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{n}}([0,\boldsymbol{T}];\boldsymbol{H}_\alpha)$ визначаємо за формулою

$$\| \boldsymbol{u}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}); \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{n}}([0,\boldsymbol{T}];\boldsymbol{H}_\alpha) \| = \sum\nolimits_{\boldsymbol{r}=0}^{\boldsymbol{n}} \| \partial^{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})/\partial \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{r}}; \boldsymbol{H}_{\alpha-\boldsymbol{r}} \|.$$

Доповідь присвячена викладу результатів, отриманих при дослідженні такої задачі з нелокальними умовами для рівняння із частинними похідними у необмеженій смузі:

$$\sum_{|\boldsymbol{s}|\le \boldsymbol{n}} \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{s}} \frac{\partial^{|\boldsymbol{s}|}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}_1}\partial \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{s}_2}} = 0, \qquad \boldsymbol{t} \in (0,\boldsymbol{T}), \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial^{\boldsymbol{j}-1}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{j}-1}}\right|_{\boldsymbol{t}=0} - \mu_{\boldsymbol{j}} \left.\frac{\partial^{\boldsymbol{j}-1}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{j}-1}}\right|_{\boldsymbol{t}=\boldsymbol{T}} = \varphi_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{j} = 1,\mathbf{K},\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}, \tag{2}$$

де $\boldsymbol{s} = (\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2) \in \boldsymbol{Z}_+^2$, $|\boldsymbol{s}| = |\boldsymbol{s}_1| + |\boldsymbol{s}_2|$, $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{s}} \in \boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{a}_{(\boldsymbol{n},0)} = 1$, $\mu_{\boldsymbol{j}} \ne 0$, $\boldsymbol{j} = 1,\mathbf{K},\boldsymbol{n}$.

Встановлено, що задача (1), (2) має єдиний розв'язок в просторі $\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{n}}([0,\boldsymbol{T}];\boldsymbol{H}_\alpha)$, якщо: а) рівняння (1) є таким, що корені $\lambda_1,\mathbf{K},\lambda_{\boldsymbol{n}}$ многочлена $\sum\nolimits_{\boldsymbol{j}=0}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{a}_{(\boldsymbol{j},\boldsymbol{n}-\boldsymbol{j})}\lambda^{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{i}^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{j}}$ мають різні ненульові дійсні частини; б) $\varphi_{\boldsymbol{j}} \in \boldsymbol{H}_{\alpha_{\boldsymbol{j}}}$ для деяких сталих $\alpha_{\boldsymbol{j}}$, $\boldsymbol{j} = 1,\mathbf{K},\boldsymbol{n}$; в) існує такий скінченний окіл нуля, з яким не перетинаються носії $\operatorname{supp}\hat{\varphi}_{\boldsymbol{j}}$, $\boldsymbol{j} = 1,\mathbf{K},\boldsymbol{n}$. Отримані результати є продовженням досліджень праці [1].

1. Волянська І.І., Ільків В.С., Симотюк М.М. Нелокальна задача для рівняння з частинними похідними другого порядку у необмеженій смузі // Укр. мат. журн. 2018, **70**, № 10. – С. 1374–1381.