УДК 330.43+336.764.2

Моделювання часової структури процентної ставки

Янішевський В. С., к.ф.-м.н., доц. каф. ПМ

Національний університет «Львівська політехніка»
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

Як відомо, дисконтування цінового активу $V(t)$ в момент часу $t > t_0$ (в моделі неперервного нарахування відсотків) відбувається за формулою

$$V_0 = V(t)e^{-r(t-t_0)}. \tag{1}$$

Тут $r > 0$ визначає фіксовану ставку відсотків. У реальності відсоткова ставка не є сталою, тому її моделюють певною стохастичною величиною. Тоді значення у виразі (1) слід усереднити за часовою реалізацією відповідного стохастичного процесу

$$V_0 = V(t)\left\langle e^{-\int_{t_0}^{t} r(w(\tau))d\tau}\right\rangle_w , \tag{2}$$

де $\left\langle \ldots \right\rangle_w$ вказує на зазначене усереднення.

Для моделювання динаміки процентної ставки часто використовуються моделі Мертона (I) і Васічека (II), які задаються наступними стохастичними диференціальними рівняннями:

$$(I)\ dr = \mu dt + \sigma dw; \qquad (II)\ dr = \beta(\mu - r)dt + \sigma dw. \tag{3}$$

Тут dw позначає стандартний вінерівський процес, де випадкова величина dw розподілена за нормальним законом з параметрами $\left\langle dw \right\rangle = 0$, $\left\langle (dw)^2 \right\rangle = dt$. Якщо розглянути розбиття часового відрізка $[t_0, t]$ n точками t_i $(i = 1 \ldots n)$, то усереднення в (2) можна записати у вигляді

$$\left\langle (\ldots) \right\rangle_w = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n+1} \frac{dw_i}{\sqrt{2\pi \Delta t_i}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{(\Delta w_i)^2}{\Delta t_i} \right)(\ldots), \tag{4}$$

де позначено $\Delta w_i = w_i - w_{i-1}$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ $(t_{n+1} = t)$. Інтегрування в (4) здійснюється за відомою мірою Вінера.

При застосуванні формули (2) необхідно знайти розв'язки стохастичної змінної $r(w(t))$ з рівнянь (3) відносно $w(t)$. Інтеграл в експоненті (1) слід представити інтегральною сумою узгоджено з (4). Інший спосіб — здійснити заміну змінної вінерівського процесу згідно рівнянь (3). В результаті для множника у формулі (1) можна отримати таке представлення

$$P(r_0, t, t_0) = \left\langle e^{-\int_{t_0}^{t} r(w(\tau))d\tau}\right\rangle_w = \int_{-\infty}^{\infty} P(r, r_0, t, t_0)dr\,. \tag{5}$$

$$P(r, r_0, t, t_0) = \int_{(r_0)}^{(r)} D\mu(r)\, J \exp\Big(-\int_{t_0}^{t} r(\tau)d\tau\Big)\,. \tag{6}$$

Тут позначено $D\mu(r)$ — міра інтегрування, а J — якобіан переходу до змінної r. В результаті обчислень на основі формул (5), (6) отримуються вирази для часової структури процентної ставки, які були отримані також іншим шляхом [1, 2].

Недоліком зазначених формул є те, що в них допускаються від'ємні значення процентної ставки ($r \in \mathbb{R}$). Наслідком цього є, зокрема, неправильна асимптотика $P(r_0, t, t_0)$ за часом $t \gg t_0$. Для обмеження областю лише додатніх значень процентної ставки ($r \in \mathbb{R}_+$) необхідно враховувати граничні умови. Спосіб врахування граничних умов стає очевидним, якщо представити $P(r, r_0, t, t_0)$ (6) у вигляді

$$P(r, r_0, t, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} dr_i \prod_{i=1}^{n} K(r_i, r_{i-1}, t_i, t_{i-1}) \exp\Big(-\sum_{i=1}^{n} r_i \Delta t_i\Big), \tag{7}$$

де $K(r_i, r_{i-1}, t_i, t_{i-1})$ позначає умовну ймовірність на часовому проміжку $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ стохастичного процесу. Задання граничних умов для умовних ймовірностей процесу дозволить обмежити значення r в допустимій області зміни. Так, зокрема для процесу Мертона (для спрощення покладемо $\mu = 0$) умовна ймовірність з умовою Діріхлє в точках $r_i = 0$ визначається формулою

$$K_D(r_i, r_{i-1}, t_i, t_{i-1}) = K(r_i, r_{i-1}, t_i, t_{i-1}) - K(-r_i, r_{i-1}, t_i, t_{i-1}). \tag{8}$$

Тоді для величини (7) отримаємо

$$P_D(r, r_0, t, t_0) = \int_{0}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} dr_i \prod_{i=1}^{n} K_D(r_i, r_{i-1}, t_i, t_{i-1}) \exp\Big(-\sum_{i=1}^{n} r_i \Delta t_i\Big). \tag{9}$$

Врахування граничних умов не дозволяє представити вираз в правій частині (9) в експонентній формі, що відповідно ускладнює розрахунки. В роботі для $P_D(r, r_0, t, t_0)$ отримано таке інтегральне представлення

$$P_D(r, r_0, t, t_0) = P_1(r, r_0, t, t_0) - P_1(-r, r_0, t, t_0), \tag{10}$$

$$P_1(r, r_0, t, t_0) = \exp\Big(-\frac{1}{2}\frac{(r - r_0)^2}{\sigma^2(t - t_0)}\Big)\int Dq(\tau) \exp\Big(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} q(\tau)d\tau\Big) \exp\Big(-\int_{t_0}^{t} |L(\tau)|d\tau\Big). \tag{11}$$

Тут $L(\tau)$ відомий лінійний функціонал від $q(\tau)$. Наявність модуля у (11) суттєво ускладнює обчислення інтегралу.

[1] *Nicolas Privault.* An elementary introduction to stochastic interest rate modeling. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2012. – 228 p.

[2] *Люу Ю. Д.* Методы и алгоритмы финансовой математики. [Пер. с англ.] – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. – 751 с.