УДК 517.5

Елементи квантового числення в курсі математичного аналізу

Клапчук М. І., к.ф.-м.н., доц. каф. ВМ
Дрогомирецька Х. Т., к.ф.-м.н., доц. каф. ВМ
Горіна О. М., к.п.н., доц. каф. ЗФ

Національний університет "Львівська політехніка"
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

Важливу роль при викладанні фундаментальних дисциплін (вищої математики, інформатики, загальної фізики) відіграє подання найновіших досягнень сучасної науки. Одним із підходів до наповнення новітнім, прикладним змістом курсу математичного аналізу є включення елементів квантового аналізу [1]. Поряд із поняттям звичайної похідної функції $y = f(x)$ у точці x вводять [2] і так звані квантові q-похідні

$$D_q\, f(x) = \frac{f(x \cdot q) - f(x)}{(q-1)x}$$

та h-похідні

$$D_h\, f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

у яких не переходять до границі і, більше того, фіксують $q \neq 1$ і $h \neq 0$, відповідно. (Символ q пов'язують із словом "quantum", а h – із сталою Планка, яка є найважливішою фізичною константою у квантовій механіці). Уведення квантових похідних дає можливість працювати з множинами недиференційованих функцій.

Зупиняючись на q-похідній, зазначимо особливості диференціювання добутку

$$D_q(f(x) \cdot g(x)) = f(qx) \cdot D_q g(x) + g(x) \cdot D_q f(x)$$

та частки

$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x) D_q(f(x)) - f(x) D_q(g(x))}{g(x) g(qx)},$$

відсутність універсального правила знаходження q-похідної складної функції.

Поряд з квантовим диференціюванням вводять q-первісну $F(x)$ функції $f(x)$: $D_q F(x) = f(x)$, яку позначають $\int f(x) d_q x$. Використовуючи методи квантового аналізу, отримують формальну рівність

$$\int f(x) d_q x = (1-q)x \sum_{j=0}^{\infty} d^j f(d^j x),$$

причому ряд у правій частині рівності називають інтегралом Джексона функції $f(x)$ [3]. Запропоноване таким чином поняття інтеграла дозволяє розглядати q-

Гамма та q-Бета функції. Подаючи елементи квантового аналізу, слід відмітити його аналогію з класичним аналізом.

В останні роки квантове числення активно застосовується у задачах моделювання так званих складних систем:

у статистичній фізиці та квантовій механіці природну реалізацію термодинаміки q-деформованих бозонів та ферміонів можна знайти у формалізмі q-аналізу [4];

у задачах неекстенсивної термодинаміки q-похідна Джексона тісно пов'язана з неекстенсивною ентропією, так як звичайна (ньютонівська) похідна пов'язана з ентропією Больцмана – Гіббса [5];

у розв'язках q-диференціальних рівнянь математичної фізики задача дифузії тепла в пористих середовищах, особливо в нанорозмірних, є особливим випадком, який успішно моделюється q-різницевим методом [6];

при аналізі ціноутворення значення q-похідної може бути показником або використання (або не використання) безризикової ставки відсотка в частковому диференціальному рівнянні ціноутворення [7].

Отже, елементи квантового аналізу можуть бути введені в програму підготовки спеціалістів з математики, фізики та інформатики, враховуючи його міждисциплінарний характер.

[1] *Thomas Ernst* The history of q-calculus and a new method — UUDM Report 2000: 16. Department of Mathematics, Uppsala University (2000) — `http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.63.274&rep=rep1&type=pdf`.

[2] *Kac V., Cheung P.* Quantum Calculus. Springer, New York — 2002. — `https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4613-0071-7`

[3] *Jackson F. H* q-Difference equations. // Am. J. Math. 32, 305-314 (1910).

[4] *Francisco A. Brito , Andre A. Marinho.* q-deformed Landau diamagnetism problem embedded in D-dimensions // Physica A 390 (2011) 2497-2503.

[5] *Ernesto P. Borges* A possible deformed algebra and calculus inspired in nonextensive thermostatistics // Physica A 340 (2004) 95 – 101.

[6] *Guo-Cheng Wu* Variational iteration method for the q-diffusion equations on time scales // Heat Transfer Research 44(5), 393–398 (2013).

[7] *P. Bruza et al.* Quantum Calculus (q-Calculus) and Option Pricing: A Brief Introduction // QI 2009, LNAI 5494, pp. 308–314 (2009).