УДК 512.546

Еквівалентність за Марковим наборів нульвимірних просторів

Пирч Н. М., к.ф.-м.н., доц. каф. ВМ

Національний університет «Львівська політехніка»
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

Для топологічного простору X позначимо через $F(X)$ вільну топологічну групу над простором X, через $A(X)$ — вільну абелеву топологічну групу над простором X, через $L(X)$ — вільний локально опуклий простір над X.

Означення 1. *[1] Нехай $(X_i)_{i\in I}$ — сім'я підпросторів топологічного простору X, $(Y_i)_{i\in I}$ — сім'я підпросторів топологічного простору Y. Скажемо, що сім'я $(X,(X_i)_{i\in I})$ є M-еквівалентною сім'ї $(Y,(Y_i)_{i\in I})$, якщо існує топологічний ізоморфізм $h\colon F(X)\to F(Y)$, такий, що $h(X_i)\subseteq G(Y_i)$ і $h^{-1}(Y_i)\subseteq G(X_i)$ для всіх $i\in I$. Будемо позначати це наступним чином $(X,(X_i)_{i\in I})\overset{M}{\sim}(Y,(Y_i)_{i\in I})$.*

Міняючи в даному означенні функтор вільної топологічної групи на функтори вільної абелевої топологічної групи та вільного локально опуклого простору, отримаємо поняття A-еквівалентних та L-еквівалентних наборів.

Два топологічних простори X та Y називаються M-еквівалентними (A-еквівалентними, L-еквівалентними) якщо їхні вільні топологічні групи (вільні абелеві топологічні групи, вільні локально опуклі простори) є топологічно ізоморфними.

Означення 2. *Нехай $(X_i)_{i\in I}$ — сім'я підпросторів топологічного простору X. Позначимо через $M[X,(X_i)_{i\in I}]$ сукупність наборів тихоновських просторів M-еквівалентних набору $(X,(X_i)_{i\in I})$, через $A[X,(X_i)_{i\in I}]$ — сукупність наборів тихоновських просторів A-еквівалентних набору $(X,(X_i)_{i\in I})$, через $L[X,(X_i)_{i\in I}]$ — сукупність наборів тихоновських просторів L-еквівалентних набору $(X,(X_i)_{i\in I})$.*

Зокрема для тихоновського простору X через $M[X]$, $A[X]$ та $L[X]$ будемо позначати класи просторів відповідно M-еквівалентних, A-еквівалентних та L-еквівалентних до простору X.

Твердження 1. *Нехай X — зліченний компактний простір, $X_1,X_2,\dots,X_n$ — його замкнені диз'юнктні підпростори. Тоді*

$$M[X,X_1,X_2,\dots,X_n]=A[X,X_1,X_2,\dots,X_n]=L[X,X_1,X_2,\dots,X_n]=$$

$$\{Y,Y_1,Y_2,\dots,Y_n : Y_i\in M[X_i],=X/(\bigcup_{i=1}^{n}X_i)\in M[Y/(\bigcup_{i=1}^{n}Y_i)]$$

і всі підпростори Y_i є замкненими і диз'юнктними в $Y$$\}$.

Твердження 2. *Нехай X — зліченний компактний простір, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — його замкнені простори, що утворюють букет. Тоді*

$$M[X, X_1, X_2, \ldots, X_n] = A[X, X_1, X_2, \ldots, X_n] = L[X, X_1, X_2, \ldots, X_n] =$$

$$\{Y, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n : Y_i \in M[X_i], X/(\bigcup_{i=1}^{n} X_i) \in M[Y/(\bigcup_{i=1}^{n} Y_i)].$$

Твердження 3. *Нехай X — зліченний компактний простір, $X_n \subseteq X_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq X_1 \subseteq X$ — його замкнені підпростори. Тоді*

$$M[X, X_1, X_2, \ldots, X_n] = \{(Y, Y_1, X_2, \ldots, Y_n) : Y_n \subseteq Y_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq Y_1 \subseteq Y,$$

$$Y/Y_1 \in M[X/X_1], Y_1/Y_2 \in M[X_1/X_2], \ldots, Y_n/Y_{n-1} \in M[X_n/X_{n-1}], Y_n \in M[X_n].$$

$$\text{і всі підпростори } Y_i \text{ є замкненими в } Y\}.$$

Твердження 4. *Нехай X — зліченний компактний простір, X_1, X_2 — його замкнені підпростори. Тоді*

$$M[X, X_1, X_2] = A[X, X_1, X_2] = L[X, X_1, X_2] =$$

$$= \{(Y, Y_1, Y_2) : Y/(Y_1 \cup Y_2) \in M^*[X/(X_1 \cup X_2)],$$
$$X_1/(X_1 \cap X_2) \in M^*[Y_1/(Y_1 \cap Y_2)], X_2/(X_1 \cap X_2) \in M^*[Y_2/(Y_1 \cap Y_2)],$$
$$X_1 \cap X_2 \in M[Y_1 \cap Y_2].$$

Твердження 5. *Нехай X — нульвимірний простір, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — його довільні, попарно різні точки. Тоді*

$$A[X, \{x_1\}, \{x_2\}, \ldots, \{x_n\}] = \{(Y, \{y_1\}, \{y_2\}, \ldots, \{y_n\}) : Y \in A[X],$$

$$y_1, y_2, \ldots, y_n \in Y, \text{ де } y_i \neq y_j \text{ при } i \neq j\}.$$

Твердження 6. *Нехай X — нульвимірний простір, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — його довільні, попарно різні точки. Тоді*

$$L[X, \{x_1\}, \{x_2\}, \ldots, \{x_n\}] = \{(Y, \{y_1\}, \{y_2\}, \ldots, \{y_n\}) : Y \in L[X],$$

$$y_1, y_2, \ldots, y_n \in Y, \text{ де } y_i \neq y_j \text{ при } i \neq j\}.$$

[1] *Пирч Н. М.* Еквівалентність за Марковим наборів тихоновських просторів 1: загальні властивості. Вісник ЛНУ Сер. Мех.-мат. – 2017. – Т. 84. – С. 38–46.