УДК 517.94:519.62

# Методи розв'язування задачі Коші з двосторонньою оцінкою локальної похибки

**Пелех Я. М.**, к.ф.-м.н., доц. каф. ОМП
**Кунинець А. В.**, к.ф.-м.н., ас. каф. ОМП
**Ментинський С. М.**, ст. викл. каф. ОМП
**Філь Б. М.**, к.ф.-м.н., доц. каф. ОМП

Національний університет «Львівська політехніка»
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

Математичні моделі багатьох прикладних задач, зокрема при дослідженні фізико-хімічних, біологічних та економічних процесів зводяться до розв'язання нелінійних систем диференціальних рівнянь. Оскільки аналітичні розв'язки таких задач можна знайти в дуже часткових випадках, то для їх розв'язування використовують наближені методи.

При дослідженні математичних моделей виникає потреба знаходити не тільки наближений розв'язок, але й оцінку похибки результату. Використання традиційних двосторонніх методів Рунге–Кутта приводить до суттєвого збільшення об'єму обчислень [1, 2, 3].

Розглядається задача Коші для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad x \in [x_0, x_0 + L], \tag{1}$$

де $y(x)$ — дійсний $m$-компонентний вектор, $f$ — дійсна векторна функція залежної та незалежної змінних, причому припускається, що функція $f$ володіє необхідною гладкістю. Оскільки запропоновані алгоритми покомпонентно переносяться на системи диференціальних рівнянь, то розглянемо скалярний випадок.

Наближений розв'язок задачі Коші (1) знаходимо у вигляді [4]:

$$y_{n+1}^{[k,l]} = y_n / D_n,$$

де

$$D_n = \sum_{i=0}^{k-1} d_{i,0} + \cfrac{d_{k,0}}{1 + \cfrac{d_{k,1}}{1 + \ddots + \cfrac{d_{k,l-1}}{1 + d_{k,l}}}}$$

Вирази для $d_{k,l}$ у випадку $k + l = \overline{1,4}$ ($k = \overline{1,4};\ l = \overline{0,3}$) мають вигляд

$$d_{0,0} = 1,\ d_{i,0} = -\sum_{m=1}^{i} d_{i-m,0} \cdot \frac{\sigma_m}{y_n},\ i = \overline{1,4},$$

$$d_{\nu,1} = -\frac{d_{\nu+1,0}}{d_{\nu,0}},\ \nu = \overline{1,3},\ d_{\mu,2} = d_{\mu+1,1} - d_{\mu,1},\ \mu = 1, 2,$$

$$d_{1,3} = d_{1,2}\frac{d_{2,2}}{d_{1,2}},\ \sigma_m = h\sum_{i=1}^{4} a_{mi}k_i,$$

$$k_i = f\left(x_n + \alpha_i h,\ \ y_n + h\sum_{j=1}^{i-1}\beta_{ij}k_j\right),\ \alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1}\beta_{ij},\ y_n \neq 0,$$

де $h$ — крок інтегрування ($h = x_{n+1} - x_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$), $a_{ij}$, $\alpha_i$, $\beta_{ij}$ — параметри.

Побудовано методи першого, другого і третього порядків точності з двосторонньою оцінкою локальної похибки, причому локальні похибки в кожній вузловій точці мають вигляд:

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \omega h^p KF(f) + O(h^{p+1}),$$

де $y(x_{n+1})$ і $y_{n+1}$ — відповідно точний і наближений розв'язок задачі (1), $h$ — крок інтегрування, $F(f)$ — деякий диференціальний оператор, обчислений в точці $(x_n, y_n)$, $K$ — константа, $p$ — порядок точності, $\omega$ — параметр двосторонності. Достовірність отриманих результатів підтверджено тим, що в часткових випадках отримано відомі традиційні (явні і неявні) числові методи розв'язування початкової задачі для звичайних диференціальних рівнянь і їх систем.


[1] *Горбунов А. Д., Шахов Ю. А.* О приближенном решении задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с наперед заданным числом верных знаков. I. Ж. вычисл. матем. и математ. физ. — 1963. — 3, № 2. С. 239–253.

[2] *Добронец Б. С. Шайдуров В. В.* Двусторонние численные методы. Новосибирск: Наука. — 1990. – 206 с.

[3] *Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И.* Вычислительные методы. Том II. М.: Наука, 1977, — 400 с.

[4] *Пелех Я. М., Будз І. С., Кунинець А. В., Ментинський С. М., Філь Б. М.* Методи розв'язування початкової задачі з двосторонньою оцінкою локальної похибки // Науковий вісник НЛТУ України. — 2019. — 29, №9. — Р. 153–160.