УДК 517.95

Двоточкова задача для рівняння із частинними похідними в комплексній області

Нитребич З. М.[1], д.ф.-м.н., проф., зав. каф. ВМ
Ільків В. С.[1], д.ф.-м.н., проф. каф. ВМ
Симотюк М. М.[2], к.ф.-м.н., с.н.с.

[1]Національний університет «Львівська політехніка»
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)
[2]Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України
(вул. Наукова, 3-б, м. Львів, 79060, Україна)

Нехай $A(z)$ – многочлен степеня $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$ – гамма-функція Ейлера, $E_\rho(z;\mu)$ – функція Міттаг-Леффлера з параметрами ρ, μ [1, 4]:

$$E_\rho(z;\mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(m\rho^{-1} + \mu)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Для відкритої підмножини Ω в $\mathbb{C}$ через $\mathrm{Exp}(\Omega)$ позначимо множину функцій

$$\left\{ u(z) : u(z) = \sum_{\lambda \in \Gamma} e^{\lambda z} f_\lambda(z), \quad f_\lambda(z) \in E_{R(\lambda)} \right\},$$

де підсумовування проводиться за всіма скінченними наборами точок $\lambda \in \Gamma \subset \Omega$, а $E_{R(\lambda)}$ – простір усіх цілих функцій $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, для яких виконується умова

$$\exists\, M > 0 \quad \exists\, r \in [0; R(\lambda)) \quad \forall z \in \mathbb{C} \qquad |f(z)| \leqslant M \exp(r|z|).$$

Символ $R(\lambda)$ для $\lambda \in \Omega$ означає радіус максимального круга

$$U_{R(\lambda)} = \{ z \in \mathbb{C} : |z - \lambda| < R(\lambda) \},$$

який цілком міститься у відкритій множині Ω. Простори $\mathrm{Exp}(\Omega)$ та їх властивості описано у [2].

Розглянемо двоточкову задачу для рівняння із частинними похідними [5]:

$$\frac{\partial^n u(t,z)}{\partial t^n} = A\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) u(t,z), \quad t \in \mathbb{C}, \quad z \in \Omega, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial^{j-1} u(t,z)}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=0} = 0, \quad j = 1, \ldots, n-1, \quad u(T,z) = \varphi(z), \quad T \neq 0, \quad z \in \Omega, \tag{2}$$

де Ω – область Рунге [2]. Встановлено умови, при виконанні яких задача (1), (2) має єдиний розв'язок $u(t,z)$, який є аналітичною функцією змінної $t \in \mathbb{C}$ і належить до $\mathrm{Exp}(\Omega)$ за змінною z для кожного фіксованого $t \in \mathbb{C}$, якщо $\varphi(z) \in \mathrm{Exp}(\Omega)$; за допомогою диференціально-символьного методу [3] для розв'язку $u(t,z)$ отримано зображення у вигляді

$$u(t,z) = \varphi\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\left\{\left(\frac{t}{T}\right)^{n-1}\frac{E_{1/n}(A(\lambda)t^n;n)}{E_{1/n}(A(\lambda)T^n;n)}\,\exp(\lambda z)\right\}\Bigg|_{\lambda=0},$$

де $\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)$ – псевдодиференціальний оператор, побудований за функцією $\varphi(z)$.

Розглянуто часткові випадки задачі (1), (2), коли $n = 2,\ 4$; $A(z) = \pm\, z^2,\ z^4$.

[1] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1967. – Ч. 3. – 300 с.

[2] *Дубинский Ю. А.* Алгебра псевдодифференциальных операторов с комплексными аргументами и ее приложения // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж., **29** (1986). – С. 109–150.

[3] *Каленюк П. І., Нитребич З. М.* Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Вид.-во Нац. ун-ту «Львівська політехніка», 2002. – 292 с.

[4] *Попов А. Ю., Седлецкий А. М.* Распределение корней функций Миттаг-Леффлера // Совр. матем. Фундаментальные направления, 2011, Т. 40. – С. 3–171.

[5] *Тихонов И. В.* Обобщенная задача Уорда для абстрактных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения, 2005, **41**, № 3. – С. 325–336.