

УДК 517.95

Початково-нелокальна задача для рівняння другого порядку з оператором Гельфонда-Леонт'єва

Негрич М. П., аспірант

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
(вул. Наукова, 3^б, м. Львів, 79060, Україна)

Нехай $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n$ – ціла функція, де $\{F_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Функція $F(z)$ породжує оператор Гельфонда-Леонт'єва D_F [1], дія $D_F[f(z)]$ якого на степеневий ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ визначається рівністю $D_F[f(z)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} f_{n+1} z^n$.

Нехай H – сепарабельний гільбертовий простір з ортонормованою базою $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Для послідовності $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ такої, що $\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k| = \infty$, означимо лінійний оператор $A : \text{Dom}(A) \rightarrow H$, $\text{Dom}(A) \subset H$, за правилом $Ae_k = \lambda_k e_k$, $k \in \mathbb{N}$. Простір усіх H -значних функцій $u(t) : \overline{B} \rightarrow H$, які є аналітичними на $B = \{t \in \mathbb{C} : |t| < 1\}$ і неперервними на $\overline{B} = \{t \in \mathbb{C} : |t| \leq 1\}$, позначимо через \mathcal{U} .

Розглядаємо таку нелокальну задачу

$$\mathcal{D}_F^2 u(t) = Au(t), \quad t \in B, \quad (1)$$

$$D_F u(0) = 0, \quad \mu u(0) - u(T) = \varphi, \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad T \in \overline{B}, \quad \varphi \in H. \quad (2)$$

Розв'язність задачі (1), (2) в просторі \mathcal{U} пов'язана з властивостями послідовності $\{\Delta(k)\}_{k=1}^{\infty}$, де $\Delta(k) = \mu P_F(0) - P_F(\lambda_k T^2)$, $P_F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} l_{2k} z^k$. Зокрема, якщо $\Delta(k) \neq 0$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, то розв'язок $u(t)$ задачі (1), (2) допускає зображення

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} t P_F(\lambda_k t^2) \Delta^{-1}(k) \varphi_k e_k, \quad (3)$$

де φ_k – координатна послідовність для φ . Встановлено умови на φ і послідовності $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, при виконанні яких ряд (3) належить до простору \mathcal{U} .

- [1] Гельфонд А. О., Леонт'єв А. Ф. Об одном обобщении ряда Фурье // Матем. сборник, 29 (71):3 (1951), С. 477–500.