УДК 517.95

Початково-інтегральна задача для рівнянь із частинними похідними

Кузь А. М.[1,2], к.ф.-м.н., асист. каф. ПМ
Симотюк М. М.[1,2], к.ф.-м.н., с.н.с., доц. каф. ВМ

[1]Національний університет «Львівська політехніка»
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)
[2]Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України
(вул. Наукова, 3б, м. Львів, 79060, Україна)

В області $D = \{(t, x), t \in (0, T), x \in \Omega^p\}$, де Ω^p – p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, розглядаємо таку початково-інтегральну задачу для рівняння із частинними похідними [1]:

$$\mathcal{L}[u] := \left(\partial_t^n + \mathcal{A}(-i\partial_x)\right) u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in D, \tag{1}$$

$$\begin{cases} \mathcal{U}_j[u] := \partial_t^{j-1} u(0, x) = 0, \quad j = \{1, \dots, n\} \setminus \{l\}, \quad l \in \{1, \dots, n\}, \\ \mathcal{U}_l[u] := \displaystyle\int_0^T t^r u(t, x) dt = \varphi(x), \quad r \in \mathbb{Z}_+, \end{cases} \tag{2}$$

де

$$\mathcal{A}(\partial_x) = \sum_{|s|=2m} a_s \partial_x^s, \quad s = (s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{Z}^p, \quad \partial_x^s = \partial_{x_1}^{s_1} \cdots \partial_{x_p}^{s_p}, - \tag{3}$$

диференціальний вираз із дійсними коефіцієнтами.

Позначимо: $W^{\gamma}_{\alpha,\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$, — простір, отриманий шляхом поповнення простору скінченних тригонометричних поліномів

$$v(x) = \sum_{|k|<\infty} v_k \exp(ik, x), \quad (ik, x) = i(k_1 x_1 + \dots + k_p x_p),$$

за нормою

$$\left\| v; W^{\gamma}_{\alpha,\beta} \right\| := \sqrt{\sum_{|k| \geqslant 0} |v_k|^2 (1 + |k|)^{2\alpha} \exp(2\beta |k|^{\gamma})};$$

$C^n\left([0, T], W^{\gamma}_{\alpha,\beta}\right)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, — простір функцій $v(t, x)$ таких, що для кожного $t \in [0, T]$ функції $\partial_t^j v(t, x)$, $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, належать до простору $W^{\gamma}_{\alpha,\beta}$ та є неперервними за t у нормі цього простору;

$$\left\| v; C^n\left([0, T], W^{\gamma}_{\alpha,\beta}\right) \right\| := \sum_{j=0}^{n} \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \left\| \partial_t^j v; W^{\gamma}_{\alpha,\beta} \right\|.$$

Теорема 1. *Якщо диференціальний вираз* (3) *є рівномірно еліптичним, тобто*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^p \quad \mathcal{A}(\xi) > A_1 |\xi|^{2m}, \quad A_1 = p^{-m} \inf_{\|\xi\|=1} \mathcal{A}(\xi) > 0,$$

то задача (1), (2) *має єдиний розв'язок у шкалі просторів* $C^n\Big([0,T], W^{\gamma}_{\alpha,\beta}\Big)$.

Запровадимо функції

$$F_{n,l-1}(t;\alpha) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\alpha^q t^{nq+l-1}}{(nq+l-1)!}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad l = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Якщо справджуються умови теореми 1, то розв'язок задачі (1), (2) зображується рівністю

$$u(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \frac{\varphi_k \exp(ik,\, x) F_{n,l-1}(t; \mathcal{A}(k))}{\int_0^T t^r F_{n,l-1}(t; \mathcal{A}(k)) dt}. \tag{5}$$

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1. Якщо* $\varphi \in W^{2m/n}_{\eta,\nu}$, *де*

$$\eta = \alpha + 2m(n-l+1)/n, \quad \nu = T(\sqrt[n]{A_2} - \sqrt[n]{A_1}), \quad A_2 = \max_{|s|=2m} \{|a_s|\} C^{p-1}_{2m+p-1},$$

то в просторі $C^n\Big([0,T], W^{\gamma}_{\alpha,\beta}\Big)$ *існує єдиний розв'язок* u *задачі* (1), (2), *який зображується формулою* (5) *та неперервно залежить від функції* φ.

Для доведення теореми 2 використано встановлені оцінки знизу для послідовності модулів значень інтегралів $\int_0^T t^r F_{n,l-1}(t; \mathcal{A}(k)) dt$, $k \in \mathbb{Z}^p$.

[1] *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.