УДК 517.946

Крайова задача на множині диференціальних рівнянь з постійними псевдодиференціальними коефіцієнтами

Ільків В. С., д.ф.-м.н., проф. каф. ВМ
Нитребич З. М., д.ф.-м.н., зав. каф. ПМ

Національний університет «Львівська політехніка»
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

Задачі для диференціальних рівнянь розглядаються, як правило, у такому формулюванні:

(i) задається область G простору змінних і відповідні простори функцій;

(ii) у цій області задається рівняння $Lu = f$ за допомогою деякого відомого диференціального виразу L і відомої функції f — правої частини;

(iii) задається система умов $l_j u = \varphi_j$ $(j = 1, \dots, J)$, де l_j — відомі оператори, φ_j — деякі функції — праві частини умов, $J \in \mathbb{N}$.

Потрібно дослідити функцію u із відповідного лінійного простору, що задовольняє рівняння $Lu = f$ і умови $l_j = \varphi_j$; це так звана пряма постановка задачі.

Досліджуються також задачі для диференціальних рівнянь при невиконанні умов (i)–(iii). Наприклад, задачі з невідомими границями при порушенні умови (i) про заданість області; задачі з невідомими параметрами в рівнянні та умовах при порушенні умов (ii) і (iii) відповідно. Їх можна вважати оберненими задачами в тому сенсі, що за заданою інформацією знаходиться не тільки розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє вказані умови, але також і відсутня інформація щодо області, параметрів рівняння чи крайових умов тощо.

У даній роботі вивчається така задача при невиконанні умови (ii), замість якої використовуємо умову (ii$'$): відомий лише вигляд (структура) псевдодиференціального виразу L, тобто задається ціла множина $\mathcal{L}_n$ псевдодиференціальних виразів. Праву частину диференціальних рівнянь $Lu = f$ вважаємо нулем.

Припускається виконання умов (i) і (iii), а саме:
розглядається область G, що є декартовим добутком часового відрізка і просторового m-вимірного тора, і простір 2π-періодичних узагальнених функцій за просторовими змінними, що неперервні разом із своїми похідними за часом [1]; оператори l_j умов задаються у вигляді добутку j-го степеня псевдодиференціального оператора та деякого іншого псевдодиференціального оператора. Ці оператори охоплюють [5] умови Коші, періодичні, нелокальні та багатоточкові.

Множина $\mathcal{L}_n$ — це множина поліномів n-го порядку щодо диференціювання за часом $\partial/\partial t$ з псевдодиференціальними коефіцієнтами.

Шукаємо псевдодиференціальний вираз $L \in \mathcal{L}_n$ і такий розв'язок u відповідного рівняння $Lu = 0$, який задовольняє задані умови $l_j u = \varphi_j$ $(j = 1, \dots, J)$.

Розв'язність прямих задач для перерахованих умов досліджувалася в ряді робіт, наприклад [5, 2, 6], за допомогою теоретико-числового підходу.

Обернені задачі (задачі ідентифікації) широко зустрічаються в застосуваннях [4, 8, 7]: спектральному аналізі, обробці сигналів в антенних ґратках, гідроакустиці, обробці мови і т. д.

Для фіксованого псевдодиференціального виразу L задача у подібній постановці вивчалася у роботі [3].

Нехай $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \Omega_m$, $t \in [\gamma_1, \gamma_2]$, де Ω_m — m-вимірний тор, $[\gamma_1, \gamma_2]$ — відрізок. Позначимо $\mathbf{H}$ — простір узагальнених періодичних функцій

$$\varphi = \varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \psi(k) e^{ikx},$$

де $\psi(k) \in \mathbb{C}$, $\mathbf{C}^l\big([\gamma_1, \gamma_2]; \mathbf{H}\big)$ — простір функцій $u = u(t, x)$ таких, що похідні $(\partial/\partial t)^j u$ для кожного $t \in [\gamma_1, \gamma_2]$ і $j = 0, 1, \ldots, l$ належать до простору $\mathbf{H}$ і неперервні за t у цьому просторі [1, 5], $\mathcal{F}$ — множина лінійних псевдодиференціальних операторів зі сталими коефіцієнтами $F = F(D)$, де $D = (D_1, \ldots, D_m)$, $D_j = \partial/(i\partial x_j)$, що діють у просторі $\mathbf{H}$ за правилом $F\varphi = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} F(k)\psi(k)e^{ikx}$.

Нехай $\mathcal{L}_n = \big\{L = L\big(\partial/\partial t, D\big) \colon L(\lambda, D) = \lambda^n + \sum_{j=1}^{n} A_j(D)\lambda^{n-j},\ A_j(D) \in \mathcal{F}\big\}$, а $l_j = l_j(\lambda, D) = \big(M_0(\lambda, D)\big)^{j-1} P(\lambda, D)$, де $M_0(\lambda, D) \in \mathcal{F}$ і $P(\lambda, D) \in \mathcal{F}$ — фіксовані аналітичні за змінною λ псевдодиференціальні оператори, $j = 1, \ldots, J$.

Досліджується задача апроксимації заданих $\varphi_j \in \mathbf{H}$ функціями $l_j u|_{t=0}$, де $j = 1, \ldots, J$, якщо $u \in \mathbf{C}^n\big([\gamma_1, \gamma_2]; \mathbf{H}\big)$ пробігає розв'язки рівнянь $Lu = 0$, $L \in \mathcal{L}_n$.

Вивчено розв'язність задачі та встановлено умови єдиності розв'язку. Знайдено алгоритм побудови розв'язків і наведено приклади застосування.

[1] *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – К.: Наук. думка, 1984. – 284 с.

[2] *Илькив В. С.* Возмущения нелокальной задачи для дифференциальных уравнений с псевдодифференциальными коэффициентами// Дифференц. уравнения. – 1990. – **26**, № 11. – С. 1962–1971.

[3] *Ільків В. С.* Задача з формальними початковими умовами для диференціальних рівнянь зі сталими псевдодиференціальними коефіцієнтами// Укр. матем. журн. – 1998. – **50**, № 7. – С. 877–888.

[4] *Марпл-мл. С. Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 584 с.

[5] *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук.думка, 1984. – 264 с.

[6] *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

[7] *Bresler Y., Makovski A.* Exact maximum likelihood parameter estimation of superimposed exponential signals in noise// IEEE Trans. Acoust. Speech. Signal Process. V. ASSSP-34, No 10, October 1986, pp. 1081–1089.

[8] *Kumaresan R., Shaw A. K.* Superresolution by structured matrix approximation// IEEE Trans. on Antennas and Propag. V. 36, No 1, January 1988, pp. 34–44.