УДК 517.9

Інтегровні бездисперсні системи, асоційовані з кодотичною алгеброю Лі векторних полів та її суперконформним аналогом

Гентош О. Є.[1], к.ф.-м.н., с.н.с.
Прикарпатський А. К.[2], д.ф.-м.н., проф.

[1]Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАНУ
(вул. Наукова, 3Б, м. Львів, 79060, Україна)
[2]Ін-т математики, Краківський університет технологій
(вул. Варшавська, 24, м. Краків, 31-155, Польща)

Розглянемо кодотичну петельну алгебру Лі $\tilde{\mathcal{G}} \ltimes \tilde{\mathcal{G}}^*_{reg}$ векторних полів, яка є напівпрямою сумою петельної алгебри Лі $\tilde{\mathcal{G}} := \widetilde{diff}(\mathbb{T}^n)$ гладких векторних полів на n-вимірному торі $\mathbb{T}^n$ у вигляді $\tilde{a} = \langle a, \partial/\partial x\rangle := \sum_{i=1}^n a_i(x;\lambda)\partial/\partial x_i$, де $x := (x_1,\ldots,x_n)^\top$, $\partial/\partial x := (\partial/\partial x_1,\ldots,\partial/\partial x_n)^\top$ і $a = a(x,\lambda) := (a_1,\ldots,a_n)$, що є голоморфними відносно "спектрального" параметра $\lambda \in \mathbb{C}$ у внутрішній $\mathbb{D}^1_+$ $+ \subset \mathbb{C}$ та зовнішній $\mathbb{D}^1_- \subset \mathbb{C}$ областях центрального одиничного диску $\mathbb{D}^1 \subset \mathbb{C}$, та її регулярного спряженого простору $\tilde{\mathcal{G}}^*_{reg}$ відносно згортки:

$$(\tilde{l},\tilde{a})_0 = \operatorname{res}\lambda^{-1}\int_{\mathbb{T}^n} dx\langle \tilde{l},\tilde{a}\rangle, \tag{1}$$

де $\tilde{l} = \langle l, dx\rangle := \sum_{i=1}^n l_i(x;\lambda)dx_i \in \tilde{\mathcal{G}}^*_{reg}$. Алгебра Лі $\tilde{\mathcal{G}}$ розкладається у пряму суму $\tilde{\mathcal{G}} = \tilde{\mathcal{G}}_+ \oplus \tilde{\mathcal{G}}_-$ її підалгебр Лі, де $\tilde{a}(\infty) = 0$ для будь-якого $\tilde{a}(\lambda) \in \tilde{\mathcal{G}}_-$, а також $\tilde{\mathcal{G}}^*_{+,reg} \simeq \tilde{\mathcal{G}}_-$, $\tilde{\mathcal{G}}^*_{-,reg} \simeq \tilde{\mathcal{G}}_+$. Задамо на $\tilde{\mathcal{G}} \ltimes \tilde{\mathcal{G}}^*_{reg}$ комутатор:

$$[\tilde{a}\ltimes\tilde{l},\tilde{b}\ltimes\tilde{m}] = [\tilde{a},\tilde{b}]\ltimes(ad^*_{\tilde{a}}\tilde{m} - ad^*_{\tilde{b}}\tilde{l}),\quad \tilde{a},\tilde{b}\in\tilde{\mathcal{G}},\quad \tilde{l},\tilde{m}\in\tilde{\mathcal{G}}^*_{reg},$$
$$[\tilde{a},\tilde{b}] = \tilde{a}\tilde{b} - \tilde{b}\tilde{a} := \langle\langle a,\partial/\partial x\rangle b,\partial/\partial x\rangle - \langle\langle b,\partial/\partial x\rangle a,\partial/\partial x\rangle,$$

де ad^* позначає коприєднану дію алгебри Лі $\tilde{\mathcal{G}}$ відносно згортки (1), та невироджений симетричний добуток: $(\tilde{a}\ltimes\tilde{l},\tilde{b}\ltimes\tilde{m}) = (\tilde{l},\tilde{b})_0 + (\tilde{m},\tilde{a})_0$. Побудуємо центральне розширення $\hat{\tilde{\mathfrak{G}}} := \tilde{\mathfrak{G}}\oplus\mathbb{C}$ алгебри Лі $\tilde{\mathfrak{G}} := \prod_{z\in\mathbb{S}^1}(\tilde{\mathcal{G}}\ltimes\tilde{\mathcal{G}}^*_{reg})$ 2-коциклом Маурера-Картана:

$$\omega_2(\tilde{a}\ltimes\tilde{l},\tilde{b}\ltimes\tilde{m}) = \int_{\mathbb{S}^1} dz((\tilde{l},\partial\tilde{b}/\partial z)_0 - (\tilde{m},\partial\tilde{a}/\partial z)_0), \tag{2}$$

де $\tilde{a}\ltimes\tilde{l},\ \tilde{b}\ltimes\tilde{m}\in\tilde{\mathfrak{G}}$. Розбиття $\tilde{\mathfrak{G}} := \tilde{\mathfrak{G}}_+\oplus\tilde{\mathfrak{G}}_-$ алгебри Лі $\tilde{\mathfrak{G}}$ у пряму суму її підалгебр Лі $\tilde{\mathfrak{G}}_+ := \prod_{z\in\mathbb{S}^1}(\tilde{\mathcal{G}}_+\ltimes\tilde{\mathcal{G}}^*_{-,reg})$ і $\tilde{\mathfrak{G}}_- := \prod_{z\in\mathbb{S}^1}(\tilde{\mathcal{G}}_-\ltimes\tilde{\mathcal{G}}^*_{+,reg}))$, дозволяє ввести на регулярному спряженому просторі $\tilde{\mathfrak{G}}^*_{reg}$ до алгебри Лі $\tilde{\mathfrak{G}}$ за допомогою $\mathcal{R}$-операторного підходу [1] дужку Лі-Пуассона:

$$\{\mu,\nu\}_{\mathcal{R}} = (\tilde{a}\ltimes\tilde{l},[R\nabla\mu(\tilde{a}\ltimes\tilde{l}),\nabla\nu(\tilde{a}\ltimes\tilde{l})] + [\nabla\mu(\tilde{a}\ltimes\tilde{l}),R\nabla\nu(\tilde{a}\ltimes\tilde{l})])+$$

$$+\omega_2(R\nabla\mu(\tilde{a}\ltimes\tilde{l}),\nabla\nu(\tilde{a}\ltimes\tilde{l}))+\omega_2(\nabla\mu(\tilde{a}\ltimes\tilde{l}),R\nabla\nu(\tilde{a}\ltimes\tilde{l})), \quad (3)$$

де $\nabla\mu(\tilde{a}\ltimes\tilde{l})$ і $\nabla\nu(\tilde{a}\ltimes\tilde{l})$ – градієнти гладких за Фреше функціоналів $\mu,\nu\in\mathcal{D}(\tilde{\mathfrak{G}}^*_{reg})$, $\mathcal{R}=(P_+-P_-)/2$, P_+ і P_- – проектори на підалгебри Лі $\tilde{\mathfrak{G}}_+$ і $\tilde{\mathfrak{G}}_-$ відповідно.

Будь-які два гамільтонові потоки на $\tilde{\mathfrak{G}}^*$, породжені дужкою Лі-Пуассона (3):

$$\partial(\tilde{a}\ltimes\tilde{l})/\partial y=\{\tilde{a}\ltimes\tilde{l},h^{(y)}(\tilde{a}\ltimes\tilde{l})\}_{\mathcal{R}},\quad \partial(\tilde{a}\ltimes\tilde{l})/\partial t=\{\tilde{a}\ltimes\tilde{l},h^{(t)}(\tilde{a}\ltimes\tilde{l})\}_{\mathcal{R}},$$

де $\nabla h^{(y)}=\lambda^{p_y}\nabla h^{(1)}(\tilde{a}\ltimes\tilde{l})$, $\nabla h^{(t)}=\lambda^{p_t}\nabla h^{(2)}(\tilde{a}\ltimes\tilde{l})$, $h^{(1)}$ і $h^{(2)}\in I(\hat{\mathfrak{G}}^*)$ – деякі інваріанти Казимира алгебри Лі $\hat{\mathfrak{G}}$ (необов'язково різні), p_y, $p_t\in\mathbb{Z}_+$, задають відокремлено комутуючі еволюційні рівняння:

$$\partial\tilde{a}/\partial y=-[\nabla h^{(y)}_{\tilde{l},+},\tilde{a}]+\partial(\nabla h^{(y)}_{\tilde{l},+})/\partial z,\ \partial\tilde{a}/\partial t=-[\nabla h^{(t)}_{\tilde{l},+},\tilde{a}]+\partial(\nabla h^{(t)}_{\tilde{l},+})/\partial z, \quad (4)$$

$$\frac{\partial\tilde{l}}{\partial y}=-ad^*_{\nabla h^{(y)}_{\tilde{l},+}}\tilde{l}+ad^*_{\tilde{a}}\nabla h^{(y)}_{\tilde{a},+}+\frac{\partial(\nabla h^{(y)}_{\tilde{a},+})}{\partial z},\ \frac{\partial\tilde{l}}{\partial t}=-ad^*_{\nabla h^{(t)}_{\tilde{l},+}}\tilde{l}+ad^*_{\tilde{a}}\nabla h^{(t)}_{\tilde{a},+}+\frac{\partial(\nabla h^{(t)}_{\tilde{a},+})}{\partial z}.$$

Твердження 1. *Комутативність еволюційних рівнянь* (4) *є еквівалентною до зображення Лакса-Сато:*

$$[\nabla h^{(y)}_{\tilde{l},+},\nabla h^{(t)}_{\tilde{l},+}]-\partial(\nabla h^{(y)}_{\tilde{l},+})/\partial t+\partial(\nabla h^{(t)}_{\tilde{l},+})/\partial y=0, \quad (5)$$

для деякої системи бездисперсних рівнянь з частинними похідними.

За допомогою умови комутування (5) отримано інтегровні системи бездисперсних рівнянь у 4- та 5-вимірних просторах незалежних змінних.

Сформульовано аналог твердження (1) для центрального розширення $\hat{\mathrm{g}}:=$ $=\tilde{\mathrm{g}}\oplus\mathbb{C}$ алгебри Лі $\tilde{\mathrm{g}}:=\prod_{z\in\mathbb{S}^1}(\mathfrak{g}\ltimes\mathfrak{g}^*_{reg})$, де $\mathfrak{g}:=diff(\mathbb{T}^n_{\mathbb{C}})=\tilde{\mathcal{G}}\times diff(\mathbb{D}_+{}^1\cup\mathbb{D}_-{}^1)$ – алгебра Лі векторних полів у вигляді $a_0(x;\lambda)\partial/\partial\lambda+\langle a,\partial/\partial x\rangle$, 2-коциклом (2) та знайдено інтегровне за Лаксом-Сато 4-вимірне узагальнення бездисперсного рівняння Михальова-Павлова.

У випадку $n=1$ побудовано суперконформний аналог кодотичної петельної алгебри Лі $\mathcal{U}\ltimes\tilde{\mathcal{U}}^*_{reg}$, де $\mathcal{U}$ – петельна алгебра Лі $\mathcal{U}$ суперконформних векторних полів у вигляді $\tilde{a}:=a+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N(D_{\vartheta_i}a)D_{\vartheta_i}$, $a:=a(x,\vartheta;\lambda)\in C^\infty(\mathbb{T}^{1|N};\Lambda_0)$, $\vartheta:=$ $=(\vartheta_1,\vartheta_2,\ldots,\vartheta_N)\in\Lambda_1^N$, $\Lambda:=\Lambda_0\oplus\Lambda_1$ – нескінченновимірна алгебра Грассмана над полем $\mathbb{C}\supset\Lambda_0$, $\mathbb{T}^{1|N}\simeq\mathbb{S}^1\times\Lambda_1^N$, $D_{\vartheta_i}:=\partial/\partial\vartheta_i+\vartheta_i\partial/\partial x$, $i=\overline{1,N}$, та $\tilde{\mathcal{U}}^*_{reg}$ – її регулярний спряжений простір відносно згортки: $(\tilde{l},\tilde{a})_0=\operatorname{res}\lambda^{-1}\int_{\mathbb{T}^{1|N}}dxd^N\vartheta\,(la)$, $\tilde{l}:=l(x,\vartheta;\lambda)dx\in\tilde{\mathcal{U}}^*_{reg}$, а також $l\in C^\infty(\mathbb{T}^{1|(2k-1)};\Lambda_1)$, якщо $N=2k-1$, і $l\in C^\infty(\mathbb{T}^{1|2k};\Lambda_0)$, якщо $N=2k$, $k\in\mathbb{N}$. За допомогою центрального розширення $\hat{\mathfrak{U}}:=\tilde{\mathfrak{U}}\oplus\mathbb{C}$ алгебри Лі $\tilde{\mathfrak{U}}:=\prod_{z\in\mathbb{S}^1}(\mathcal{U}\ltimes\mathcal{U}^*_{reg})$ відповідним 2-коциклом Маурера-Картана отримано інтегровні за Лаксом-Сато супераналог 4-вимірного рівняння Михальова-Павлова та його поліноміальні узагальнення.

[1] *Faddeev L. D., Takhtadjan L. A.* Hamiltonian methods in the theory of solitons. Classics in Mathematics. — Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York. – 2007. – 592 p.