УДК 512. 552. 12

Суми та добутки оборотних елементів та ідемпотентів у дуо-кільцях

Гаталевич А. І.[1], к.ф.-м.н., доц., зав. каф. ВМ
Кучма М. І.[2], к.ф.-м.н., доц. каф. ВМ

[1]Львівський національний університет імені Івана Франка
(вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна)
[2]Національний університет «Львівська політехніка»
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

Поняття одинично-регулярного елемента ввела Г. Ерліх. Згідно з працею [1], елемент кільця R називають одинично-регулярним, якщо $x = xux$ для деякого оборотного елемента $u \in R$. Ерліх назвала кільце одинично-регулярним, якщо всі його елементи є одинично-регулярні. Такі кільця інтенсивно вивчають як важливий клас регулярних за фон Нейманом кілець. Паралельно Ніколсон ввів поняття чистого елемента та чистого кільця [4]. Ці класи кілець містяться в класі кілець з властивістю заміни, які відіграють важливу роль у некомутативній теорії кілець і модулів. П. Вамош досліджував так звані 2-добрі кільця, де кожен елемент є сумою двох оборотних елементів. Досліджено деякі класи одинично-регулярних та чистих матриць над дуо-кільцем та введено поняття майже одиничного стабільного рангу 1 і майже 2-доброго кільця для дуо-кільця. Доведено існування таких кілець і вказано їхній зв'язок з іншими класами кілець, зокрема з адекватними справа, які узагальнюють комутативні адекватні області [2, 3]. Усюди під кільцем R розумітимемо асоціативне кільце з відмінною від нуля одиницею. Позначимо через $U(R)$ групу оборотних елементів кільця R.

Означення 1. *Дуо-кільцем називають кільце R, в якому кожен правий, чи лівий ідеал кільця є двобічним.*

Означення 2. *Елемент a кільця R називають адекватним справа, якщо для довільного елемента $b \in R$ існують такі елементи $r,\ s \in R$, що $a = r \cdot s$, $rR + bR = R$, і для такого довільного елемента $s' \in R$, що $sR \subset s'R \neq R$, виконується умова $s'R + bR \neq R$.*

Означення 3. *Кільце R називають правим (лівим) кільцем Безу, якщо кожний скінченно породжений правий (лівий) ідеал є головним. Праве та ліве кільця Безу називають кільцем Безу.*

Означення 4. *Кільце Безу, в якому довільний ненульовий елемент є адекватним справа, називають адекватним справа кільцем.*

Означення 5. *Якщо довільна 1×2 (2×1) матриця над кільцем R володіє діагональною редукцією, то кільце R називають правим (лівим) кільцем Ерміта. Праве і ліве кільця Ерміта називають кільцем Ерміта.*

Теорема 1. *Нехай K — дуо-кільце Ерміта. Матриця $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ є одинично-регулярною в кільці $R = M_2(K)$ тоді і тільки тоді, коли існує ідемпотент $e \in K$ і унімодулярний рядок $(a', b') \in K^2$ такий, що $(a, b) = e(a', b')$. Зокрема, якщо K — нерозкладне кільце, тоді єдиними ненульовими одинично-регулярними матрицями в R з нульовим другим рядком є $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, де (a, b) — унімодулярний рядок.*

Теорема 2. *Нехай $a \in K$ — чистий елемент. Тоді для довільного $b \in K$ матриця $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ є чистою в R.*

Означення 6. *Кільце R називають 2-добрим кільцем, якщо довільний елемент в R є сумою двох оборотних елементів.*

Твердження 1. *Нехай R є дуо-областю Безу. Нехай a — ненульовий необоротний елемент в R і b — такий елемент в R, що $aR + bR = R$. Тоді образ елемента b за канонічного гомоморфізму $R \to R/aR$ є оборотним елементом. Якщо $aR + bR \neq R$, то образ елемента b за канонічного гомоморфізму $R \to R/aR$ є дільником нуля.*

Теорема 3. *Нехай R — дуо-область Безу і нехай елемент a є таким адекватним справа елементом області R, що $2R + aR = R$. Тоді фактор-кільце R/aR є 2-добрим кільцем.*

Означення 7. *Кільце R називають майже 2-добрим кільцем, якщо для деякого такого ненульового необоротного елемента $a \in R$, що $2R + aR = R$ кільце R/aR є 2-добрим кільцем.*

Згідно з теоремою 2, адекватна справа область є прикладом майже 2-доброго кільця. Тому справедлива така теорема:

Теорема 4. *Адекватна справа область є майже 2-добрим кільцем.*

[1] *Ehrlich G.* Unit-regular rings // Portugal. Math. – 1968. – V. 27. – P. 209–212.

[2] *Helmer O.* The elementary divisor for certain rings without chain conditions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – V. 49, №2. — P. 225–236.

[3] *Larsen M., Lewis W., Shores T.* Elementary divisor rings and finitely present modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – V. 187. – P. 231–248.

[4] *Nicholson W. K.* Lifting idempotents and exchange rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1977. – V. 229. – P. 269–278.

[5] *Vamos P.* 2-good rings // Quart. J. Math. – 2005. – V. 56. – P. 417–430.