УДК 517.956

Нелокальна задача з умовами типу Діріхле-Неймана для диференціальних рівнянь з частинними похідними із постійними коефіієнтами

Баранецький Я. О., к.ф.-м.н., доц. каф. ОМП
Каленюк П. І., д.ф.-м.н., проф. каф. ВМ

Національний університет «Львівська політехніка»
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

В одиничному квадраті G методом Фур'є досліджується задача з нелокальними умовами, які є багатоточковими збуреннями мішаних крайових умов. Вивчено властивості оператора перетворення $R : L_2(G) \to L_2(G)$, який відображає нормовані власні функції оператора L_0 задачі із крайовими умовами Діріхле-Неймана у власні функції оператора L, досліджуваної задачі. Також побудовано комутативну групу операторів перетворення $\Gamma(L_0)$. Встановлено, що кожному операторові $R \in \Gamma(L_0) : L_2(G) \to L_2(G)$ відповідає деяка нелокальна задача і навпаки. Побудовано систему $V(L)$ власних функцій оператора L. Визначено припущення за яких система $V(L)$ — повна та мінімальна в просторі $L_2(G)$. Знайдено умови, за яких система $V(L)$ є базисом Рісса у просторі $L_2(G)$, та нелокальна задача має єдиний розв'язок у вигляді ряду Фур'є за цією системою.

Нехай
$$L(-D_1^2, -D_2^2)u := \sum_{q=0}^{n} a_q D_1^{2q} D_2^{2n-2q} u = f(x),\ x \in G, \tag{1}$$

$$\ell_{s,1}u := D_1^{2s-2}u|_{x_1=0} + D_1^{2s-2}u|_{x_1=1} + \ell_{s,1}^1 u = 0,\ s = 1, \dots, n, \tag{2}$$

$$\ell_{n+s,1}u := D_1^{2s-2}u|_{x_1=0} - D_1^{2s-2}u(1, x_2) = 0,\ s = 1, \dots, n, \tag{3}$$

$$\ell_{s,2}u := D_2^{2s-1}u|_{x_1=0} - D_2^{2s-1}u|_{x_1=1} + \ell_{s,2}^1 u = 0,\ s = 1, ..., n, \tag{4}$$

$$\ell_{n+s,2}u := D_2^{2s-1}u|_{x_2=0} + D_2^{2s-1}u|_{x_2=1} = 0,\ s = 1, \dots, n, \tag{5}$$

де
$$\ell_{s,j}^1 u := \sum_{r=0}^{n_j} \sum_{q=0}^{k_{s,j}} b_{q,r,s,j} D_1^q u(x_1, x_2)|_{x_j = x_{j,r}},\ s = 1, ..., n,\ j = 1, 2. \tag{6}$$

$$0 = x_{j,1} < x_{j,2}, ..., x_{j,n_j} = 1,\ b_{q,r,s,j} \in \mathbb{R},$$

$$q = 0, 1, ..., k_{s,j},\ k_{s,j} < 2n,\ r = 0, 1, ..., n_j,\ s = 1, \dots, n,\ j = 1, 2,$$

$$\mu_{1,k} = \pi^2 k^2,\ \mu_{2,m} = 4\pi^2 m^2,\ k = 1, ...,\ m = 0, 1, ...$$

Нехай $L : L_2(G) \to L_2(G)$ – оператор задачі (1)–(6); $Lu := L(-D_1^2, D_2^2)u$
$u \in D(L) := \{u \in W_2^{2n}(G) : \ell_{s,j}u = 0,\ s = 1, \dots, 2n,\ j = 1, 2\}$.

Розглянемо припущення.

Припущення P_1: $b_{q,r,s,j} = (-1)^j(-1)^q b_{q,k_0-r,s,j}$, $x_{j,r} = 1 - x_{j,k_0-r}$, $q = 1,\ldots,k_{s,j}$, $r = 0,\ldots,k_0$, $s = 1,2,\ldots$, $j = 1,\ldots,n$.

Припущення P_2: $k_{s,j} \leqslant 2s - 2$, $s = 1,\ldots,n$, $j = 1,2$.

Припущення P_3: для будь-яких μ_1, $\mu_2 \in \mathbb{R}$ існує $C > 0$ таке, що виконується нерівність $C|\mu|^n \leqslant |L(\mu_1,\mu_2)|$, $\mu := (\mu_1,\mu_2)$, $|\mu|^2 := |\mu_1|^2 + |\mu_2|^2$.

Теорема. Нехай припущення P_1–P_3. виконуються. Тоді система $V(L)$, власних функцій оператора L, є базисом Рісса простору $L_2(G)$, та для будь-якої функції $f \in L_2(G)$ існує єдиний розв'язок задачі (1)–(6) .

[1] *Amanov D., Ashyralyev A.* Well-posedness of boundary value problems for partial diffferential equations of even order. Electronic Journal of Differential Equations, 2014, **108**, 1–18.

[2] *Baranetskij Ya. O., Demkiv I. I., Kalenyuk P. I., Solomko A. V.* The Nonlocal boundary problem with perturbations of antiperiodity condions for the eliptic equations with constant coefficients. Carpathian Math. Publ. 2018, **10**, (2), 215–234.

[3] *Baranetskij Ya. O., Kalenyuk P. I., Kopach M. I.* The Nonlocal boundary problem with multypoint perturbations for the differential equations with constant coefficients of even order. Math.methods and physic-mech field. 2018, ICAAM, **61** (1), 16–39.

[4] *Baranetskij Ya. O., Kalenyuk P. I., Kopach M. I., Solomko A. V.* The nonlocal problem with mixed boundary conditions for the elliptic equation with constant coefficients. Carpathian Math. Publ. 2019, **12** (2), 228–239.

[5] *Irgashev B. Yu.* On one boundary-value problem for an equation of higher even order. Russian Math. (Iz. VUZ). 2017, **61** (9), 10–18.

[6] *Koshanov B., Soldatov A.* About the generalized Dirichlet-Neumann problem for an elliptic equation of high order. 2018.