УДК 517.95

Метричні оцінки значень функцій Міттаг–Леффлера

Волянська І. І.[1], асист. каф. ВМ
Ільків В. С.[1], д.ф.-м.н., проф. каф. ВМ
Репетило С. М.[1,2], к.ф.-м.н., асист. каф. ОМП
Симотюк М. М.[1,2], к.ф.-м.н., с.н.с., доц. каф. ВМ

[1]Національний університет «Львівська політехніка»
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)
[2]Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України
(вул. Наукова, 3б, м. Львів, 79060, Україна)

Умови розв'язності двоточкової задачі для рівняння із частинними похідними

$$\partial_t^n u(t,x) = A(-i\partial_x)u(t,x), \quad t \in (0,T), \quad x \in \Omega^p, \quad T > 0, \tag{1}$$

$$\partial_t^{j-1} u(0,x) = 0, \quad j = 1,\dots,n-1, \quad u(T,x) = \varphi(x), \quad x \in \Omega^p, \tag{2}$$

де $\partial_t = \partial/\partial t$, $x = (x_1,\dots,x_p)$, $\partial_x = (\partial/\partial x_1,\dots,\partial/\partial x_p)$, $A(\xi_1,\dots,\xi_p)$ – многочлен степеня n, Ω^p – p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, залежать від поведінки значень $E_{1/n}(A(k)T^n;n)$, $k = (k_1,\dots,k_p) \in \mathbb{Z}^p$; тут $E_\rho(z;\mu) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(m\rho^{-1}+\mu)}$ – відома функція Міттаг-Леффлера [2] з параметрами ρ,μ.

Якщо $E_{1/n}(A(k)T^n;n) \neq 0$ для всіх $k = (k_1,\dots,k_p) \in \mathbb{Z}^p$, то задача (1), (2) може мати не більше одного розв'язку у класі функцій, гладких за t, 2π-періодичних за $x_1,\dots,x_p$. Питання про існування розв'язку задачі (1), (2) у класах функцій експоненційного типу на торі залежить від наявності експоненційних оцінок для величин $E_{1/n}(A(k)T^n;n)$, $k = (k_1,\dots,k_p) \in \mathbb{Z}^p$, які входять у знаменники для коефіцієнтів Фур'є розв'язку. За допомогою метричного підходу [1] встановлено такий результат.

Теорема 1. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T \in (0,T_0]$ нерівність*

$$|E_{1/n}(A(k)T^n;n)| \geqslant \exp(-\delta T_0|k|), \quad |k| = |k_1| + \ldots + |k_p|,$$

виконується для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, якщо $\delta > \sup\{|A(k)|^{1/n}|k|^{-1} : k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{\mathbf{0}\}\}$.

Для деяких конкретних многочленів $A(\xi)$ отримано точніші результати.

[1] *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

[2] *Тихонов И. В.* Обобщенная задача Уорда для абстрактных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения, 2005, **41**, № 3. – С. 325–336.