УДК 517.524

Про швидкість збіжності одного класу двовимірних відповідних гіллястих ланцюгових дробів

Антонова Т. М., к.ф.-м.н., доц. каф. ПМ
Возна С. М., к.ф.-м.н., доц. каф. ПМ

Національний університет «Львівська політехніка»
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

Об'єктом дослідження є нескінченні гіллясті ланцюгові дроби (ГЛД) вигляду

$$\mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty}\frac{a_{j,j}}{1}+\mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty}\frac{a_{j,0}}{1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{a_{k+j,k}}{1}}+\mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty}\frac{a_{0,j}}{1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{a_{k,k+j}}{1}}, \tag{1}$$

де

$$a_{k,l}=b_{k,l}z_1z_2,\ a_{k,0}=b_{k,0}z_1,\ a_{0,k}=b_{0,k}z_2,\quad k,l=1,2,\ldots, \tag{2}$$

$b_{k,l}, k,l=0,1,\ldots,k+l\geqslant 1$ — сталі, $(z_1,z_2)\in D\subset\mathbb{C}^2$. ГЛД такої структури так само, як і двовимірні неперервні дроби, пов'язані із задачею відповідності між формальним подвійним степеневим рядом і послідовністю раціональних наближень функції двох змінних [2, 3].

Розглядається послідовність фігурних наближень (підхідних дробів за Siemaszko) $\{\tilde f_n(z_1,z_2)\}$, $n=1,2,\ldots$,

$$\tilde f_n(z_1,z_2)=\mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{[n/2]}\frac{b_{j,j}z_1z_2}{1}+\mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n}\frac{b_{j,0}z_1}{1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{[(n-j)/2]}\dfrac{b_{k+j,k}z_1z_2}{1}}+\mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n}\frac{b_{0,j}z_2}{1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{[(n-j)/2]}\dfrac{b_{k,k+j}z_1z_2}{1}},$$

де $[\alpha]$ — ціла частина дійсного числа α.

Функціональний ГЛД (1), (2) фігурно рівномірно збігається в області D, якщо, починаючи з деякого номеру n_0, всюди в D його наближення $\tilde f_k=\tilde f_k(z_1,z_2)$, $k\geqslant n_0$, мають сенс і скінченні, і для довільного $\varepsilon>0$ існує такий номер $n_1\geqslant n_0$, що для всіх $n,m\geqslant n_1$ і довільних $(z_1,z_2)\in D$ виконується нерівність

$$\left|\tilde f_n-\tilde f_m\right|<\varepsilon.$$

Теорема. *Нехай для елементів ГЛД (1), (2) для всіх $j,k=1,2,\ldots$, виконуються такі умови:*

$$0\leqslant b_{k,k}\leqslant L,\ 0\leqslant b_{k+j,j}\leqslant L',\ 0\leqslant b_{j,k+j}\leqslant L'',\ 0\leqslant b_{k,0}\leqslant L_1,\ 0\leqslant b_{0,k}\leqslant L_2,$$

$$(z_1,z_2)\in G_K=\{|z_j|<K_j,|\arg(z_j)|\leqslant\pi/2,\ j=1,2,\ \arg(z_1)+\arg(z_2)=0\},$$

де L,L',L'',L_1,L_2,K_1,K_2 — додатні сталі.

Тоді ГЛД (1), (2) є фігурно рівномірно збіжним, і справджується оцінка

$$|\tilde{f}_n - \tilde{f}_{2p}| \leqslant$$

$$\leqslant L_1K_1\left(\frac{L'K_1K_2}{1+L'K_1K_2}\left(\frac{L_1K_1}{\sqrt{1+(L_1)^2(K_1)^2}}+1\right)S_1+\left(\frac{(L_1)^2(K_1)^2}{1+(L_1)^2(K_1)^2}\right)^p\right)+$$

$$+L_2K_2\left(\frac{L''K_1K_2}{1+L''K_1K_2}\left(\frac{L_2K_2}{\sqrt{1+(L_2)^2(K_2)^2}}+1\right)S_2+\left(\frac{(L_2)^2(K_2)^2}{1+(L_2)^2(K_2)^2}\right)^p\right)+$$

$$+\frac{(LK_1K_2)^{p+1}}{(1+LK_1K_2)^p}, \qquad p=2,3,\ldots, \quad n>2p,$$

де

$$S_k = \begin{cases} \dfrac{\delta_k^p}{\delta_k - \tilde{\delta}_k}, \ \tilde{\delta}_k < \delta_k, \\ p\delta_k^{p-1}, \ \tilde{\delta}_k = \delta_k, \end{cases} \qquad k=1,2,$$

$$\delta_1 = \max\left(\frac{L'K_1K_2}{1+L'K_1K_2}, \ \frac{(L_1)^2(K_1)^2}{1+(L_1)^2(K_1)^2}\right),$$

$$\tilde{\delta}_1 = \min\left(\frac{L'K_1K_2}{1+L'K_1K_2}, \ \frac{(L_1)^2(K_1)^2}{1+(L_1)^2(K_1)^2}\right),$$

$$\delta_2 = \max\left(\frac{L''K_1K_2}{1+L''K_1K_2}, \ \frac{(L_2)^2(K_2)^2}{1+(L_2)^2(K_2)^2}\right),$$

$$\tilde{\delta}_2 = \min\left(\frac{L''K_1K_2}{1+L''K_1K_2}, \ \frac{(L_2)^2(K_2)^2}{1+(L_2)^2(K_2)^2}\right).$$

Зауважимо, що за умов теореми виконуються умови теореми 2 з [1].

[1] *Антонова Т. М., Возна С. М.* Про один аналог методу фундаментальних нерівностей для дослідження збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду// Вісник Національного ун-ту "Львівська політехніка". Фізико-математичні науки – 2017. – №871. – С. 5–12.

[2] *Кучмінська Х. Й.* Двовимірні неперервні дроби. — Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики, 2010. — 218 с.

[3] *Siemaszko W.* Branched continued fractions for double power series // J. Comp. and Appl. Math. – 1980. – **6**, № 2. – P. 121–125.