

# ЗАСОБИ ВИМІРЮВАНЬ ЕЛЕКТРИЧНИХ ТА МАГНІТНИХ ВЕЛИЧИН

УДК 621.317

## ДОСЛІДЖЕННЯ ПОХИБОК РЕКОНСТРУКЦІЙ ПРОВІДНОСТІ ОБ'ЄКТА У 24-ЕЛЕКТРОДНІЙ ТОМОГРАФІЧНІЙ СИСТЕМІ

© Петровська Ірина<sup>1</sup>, Дорожовець Михайло<sup>1,2</sup>, 2006

<sup>1</sup>Національний університет "Львівська політехніка", кафедра інформаційно-вимірювальних технологій,  
Львів, вул. С. Бандери, 12, 79013, Україна

<sup>2</sup>Ряшівська політехніка, кафедра метрології та вимірювальних систем,  
Ряшів, вул. В. Поля, 2, 35-959, Польща

*Наведено результати дослідження схеми 24-електродної томографічної системи, у разі апроксимації об'єкта трикутними скінченними елементами, результати вимірювань якої отримано із застосуванням методу вузлових потенціалів. Зокрема, досліджено похибки реконструкції провідності об'єкта на різних ітераціях.*

*Приведены результаты исследования схемы 24-электродной томографической системы, при апроксимации объекта треугольными конечными элементами, результаты измерений которой получены при использовании метода узловых потенциалов. В частности, исследованы погрешности реконструкции проводимости объекта на разных итерациях.*

*The article represent the results of 24-electrode circuit of a tomography system analysis at the example of results of measurement using junction potentials method. The object is approximated using triangular finite elements. In particular, the restoration error of object's conductivity at different iteration steps was analysed.*

**1. Вступ.** Похибки реконструкції провідності електрично збудженого об'єкта є одним з чинників, що погіршує якість відтворення томографічних образів в електричній (резистивній, провіднісній, ємнісній) томографії [1–3]. На підставі виконаних у [1–3] досліджень показано, що значення таких похибок залежить від кількості елементів апроксимації образу, нерівномірності розподілу елементів провідності, а також від кількості ітерацій. Оскільки у томографічній системі під час зондування досліджуваного об'єкта електричний струм протікає переважно по зовнішніх шарах об'єкта, а у внутрішні шари проникає гірше, то похибки вимірювань по-різному впливають на точність відтворення провідності у зовнішніх та внутрішніх шарах досліджуваного об'єкта. Якщо необхідно відтворювати образ провідності із похибками, що не перевищують відсотка, то похибки вимірювання не повинні перевищувати тисячних часток відсотка і навіть менше.

Дискретизацію досліджуваного об'єкта можна виконувати методом скінченних елементів, який полягає [1, 6] у представленні досліджуваного середовища трикутними елементами (загалом розміри та

конфігурації елементів можуть бути і іншими). Кількість трикутних елементів різна для схем з різною кількістю елементів, вона збільшується у міру під'єднання більшої кількості зовнішніх електродів. Результати досліджень в цій статті будуть наведені для 24-електродної схеми, до якої підключено 24 зовнішні електроди і таких елементів є 96 (рис.1). Кожен з вибраних трикутних елементів характеризується трьома вузловими напругами. Недоліком цього методу є складність формування результатів вимірювань, проте можна забезпечити необхідну точність розв'язку за порівняно невеликої кількості ітерацій. Метод скінченних елементів трансформується у метод зосереджених елементів, коли сторони трикутних елементів замінюються електричними елементами, а саме провідностями чи опорами [3].

На рис. 1 показано об'єкт досліджень, апроксимований 96-ма трикутними елементами, сторони яких мають провідності певної величини, які необхідно відтворити (загальна їхня кількість 156). До об'єкта підключено ззовні 24 електроди, вимірювання велись методом вузлових напруг із визначенням 61-ї вузлової напруги.

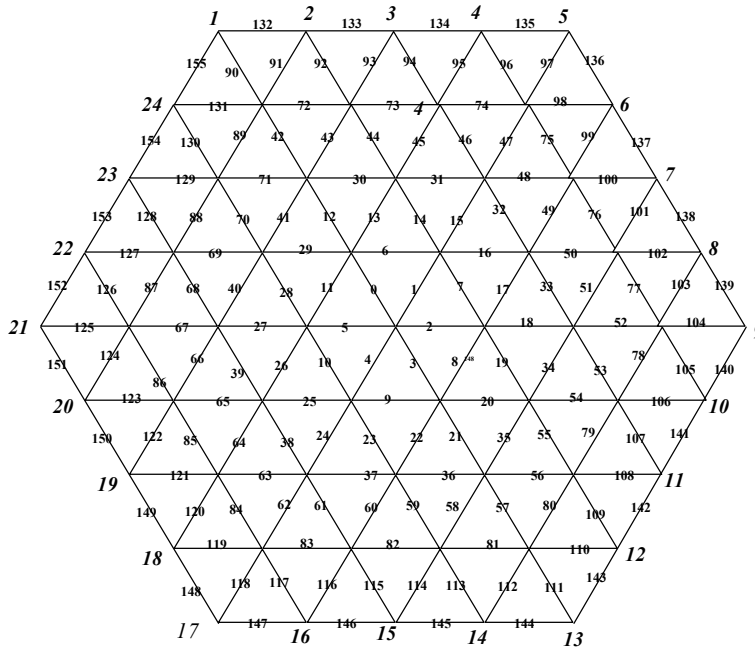


Рис. 1. Об'єкт досліджень із підключеними зовнішніми 24-ма електродами, апроксимований 96-ма трикутними скінченними елементами

**Метою виконуваних досліджень** є зменшення похибки реконструкції розподілу провідності та зменшення часових затрат на розв'язання як прямої, так і оберненої задач.

**2. Метод розв'язування прямої задачі методом вузлових потенціалів в електричній томографії і знаходження матриці Якобі.** Об'єкт дослідження збуджуємо зовнішнім джерелом струму  $I_0$ , який прикладається до сусідніх зовнішніх електродів, і в апроксимаційній схемі позначимо вузлові напруги (всього їх 61), у внутрішньому шарі елементів їх 7 (разом із центральним вузлом), в другому шарі – 12, третьому – 18, четвертому зовнішньому – 24. Один з електродів, наприклад, перший, заземлимо, а на інших виконаємо вимірювання, попарно прикладаючи до сусідніх електродів струми і знімаючи значення напруг.

Метод розв'язування прямої задачі полягає в тому, що спочатку будують матрицю провідностей  $G$  усієї сітки елементів. Прикладаючи струми  $I$  почергово до кожної пари зовнішніх електродів (1–2, 2–3, 3–4, і т.д., 24–1), всього таких комбінацій 23, вимірюємо напруги між іншими парами електродів: прикладаючи, наприклад, струми до електродів 1–2, визначаємо напруги між парами зовнішніх електродів (крім найближчих сусідніх): 3–4, 4–5, 5–6, і т.д., 23–24, отримуючи 24 результати. Відтак, прикладаючи струм

до наступної пари електродів 2–3, вимірюємо напруги між 4–5, 5–6, і т.д., 24–1.

Розв'язання прямої задачі зводиться до розв'язання системи лінійних рівнянь, яка у матричній формі має вигляд

$$U = G^{-1} \cdot I, \tag{1}$$

де  $U$  – вектор шуканих вузлових потенціалів;  $G^{-1}$  – обернена матриця провідності системи;  $I$  – вектор вхідних струмів.

Розв'язавши рівняння (1), отримуємо матрицю результатів виміряних напруг розміром 24x23. На підставі знайдених вузлових напруг визначаємо різниці вузлових потенціалів для кожної гілки (провідності) досліджуваного об'єкта за різних комбінацій електродів (матриця різниць потенціалів має 24x156 елементів). Визначаємо також різниці потенціалів зовнішніх вузлів (матриця різниць потенціалів зовнішніх вузлів має 24x24 елементи). З матриці різниць потенціалів вибираємо лише половину (252) незалежних результатів (всіх є 24x21=504, решту не враховуємо, оскільки вони повторюються).

Далі розраховуємо якобіан  $S$  (матрицю чутливостей розміром 252x96), коефіцієнти якого дорівнюють відношенню приросту потенціалу на  $i$ -му зовнішньому електроді (прикладаючи струм до  $k$ -ї пари електродів) до приросту провідності на  $i$ -му дискретному елементі (чи  $j$ -й ділянці):

$$S_{i,j} = \frac{\partial U_{i(k)}}{\partial g_j} \quad (2)$$

У [3] показано, що матрицю Якобі без методичних похибок можна розраховувати, використовуючи лише один розв'язок прямої задачі, а саме у разі рівносторонніх трикутних елементів за виразом

$$S_{i,j} = a_0 \cdot [\Delta U_{j,1-2}^{(i)} \cdot \Delta U_{j,1-2}^{(k)} + \Delta U_{j,2-3}^{(i)} \cdot \Delta U_{j,2-3}^{(k)} + \Delta U_{j,3-1}^{(i)} \cdot \Delta U_{j,3-1}^{(k)}], \quad (3)$$

де  $a_0$  – сталий коефіцієнт, який для рівносторонніх трикутників залежить лише від товщини шару провідності,  $\Delta U_{j,1-2}^{(i)}, \Delta U_{j,1-2}^{(k)}$  – різниці потенціалів гілки  $j=0$  елемента під час збудження об'єкта з боку  $i$ -х та  $k$ -х електродів

**3. Розв'язування оберненої задачі, тобто реконструкція провідності в електричній томографії.** Оскільки результатами вимірювань в електричній томографії є різниці потенціалів, то, щоб отримати обернену задачу, найближчу до лінійної, подамо її у вигляді добутку шуканої  $Z$ -матриці на матрицю струмів збудження  $I_0$ , тобто

$$U_{вим} = Z \cdot I_0 \quad (4)$$

Враховуючи, що опори гілок  $R_j$  є оберненими до провідності гілок  $g_j$  :  $R_j = 1/g_j$ , а також, що

$$\frac{\partial R_j}{\partial g_j} = -\frac{1}{g_j^2}, \text{ матриця чутливості стосовно змін номерів гілок може бути перерахована за виразом:}$$

$$S_{z,i,j} = -S_{g,i,j} \cdot g_j^2. \quad (5)$$

На основі отриманого значення гесіана на  $k$ -й ітерації можна розрахувати реконструйовану матрицю:

$$REC = (S_z^T \cdot S_z)^{-1} \cdot S_z^T. \quad (6)$$

А реконструйоване значення опорів дорівнюватиме:

$$R_{рек}^{(k)} = R_{рек}^{(k-1)} + (S_z^{(k)T} \cdot S_z^{(k)})^{-1} \cdot S_z^{(k)T} \cdot (U_{вим}^{(k)} - U_{розр}^{(k)}) \quad (7)$$

де  $R_{рек}$  – реконструйований розподіл провідності на  $k$ -й і попередній  $k-1$  ітераціях,  $U_{вим}$  і  $U_{розр}$  – виміряні і

розраховані значення напруг на  $k$ -й ітерації. Тоді значення провідності можна розрахувати як:

$$g_j^{(k)} = \frac{1}{R_{рек j}^{(k)}}. \quad (8)$$

Для стійкості результатів необхідно знати ступінь зумовленості гесіана  $cond(HES)$ . Оскільки для 24-електродної схеми він є занадто великим до  $5,22 \times 10^7$ , необхідно ввести стабілізуючий доданок  $\mu I_1$ , який покращив би стійкість результатів, (де  $\mu$  – параметр регуляризації,  $I_1$  – одинична матриця) і знайти нову реконструктивну матрицю, щоб розрахувати достовірний розподіл провідності. Тоді регуляризоване реконструйоване значення опору:

$$R_{рек}^{(k)} = R_{рек}^{(k)} + (S_z^{(k)T} \cdot S_z^{(k)} + \mu I_1)^{-1} \cdot S_z^{(k)T} \cdot (U_{вим}^{(k)} - U_{розр}^{(k)}) \quad (9)$$

А регуляризоване реконструйоване значення провідності дорівнюватиме  $g_j = 1/R_j$ .

**4. Дослідження тестових моделей і отримання характеристик похибок вимірювань та графіків отриманих залежностей.**

Ми виконували дослідження для чотирьох тестових моделей (рис.2). На рис. 2, а показана модель, у якій провідність внутрішнього шару трикутних елементів (від 1 по 6) збільшена вдвічі, решта провідностей дорівнюють 0,065, на рис. 2, б модель, у якій провідність двох внутрішніх шарів трикутних елементів (від 1 по 24) збільшена вдвічі, решта провідностей дорівнюють 0,065, на рис. 2, в модель, у якій провідність третього шару трикутних елементів (від 25 по 54) збільшена вдвічі, решта провідностей рівні 0,065, на рис. 2, г модель, у якій провідність внутрішнього шару трикутних елементів (від 55 по 96) збільшена вдвічі, решта провідностей дорівнюють 0,065.

На першій ітерації знаходимо якобіан за рівномірного розподілу ( $g=1,65 \times 10^{-3}$ ). Реконструйоване значення провідності обчислюємо, знаючи задане значення провідностей (для кожної моделі різне) і результати вимірювань напруг (різні для різних моделей).

Маючи результат реконструкції на першій ітерації, беремо його як початковий (вже нерівномірний) на другій ітерації і знаходимо новий якобіан, реконструктивну матрицю, а відповідно і новий розподіл і приріст провідності. Такі розрахунки були зроблені для всіх чотирьох моделей в програмі MathCAD Professional 2000. Результати п'яти ітерацій показані на рис. 3–6.

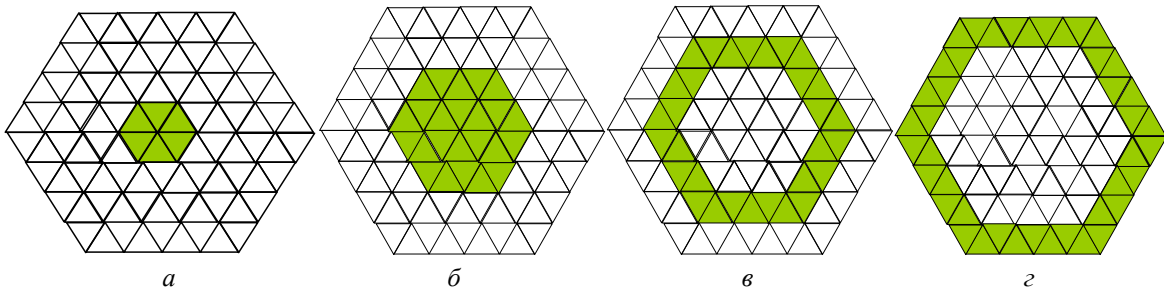


Рис. 2. Тестові моделі розподілу провідності

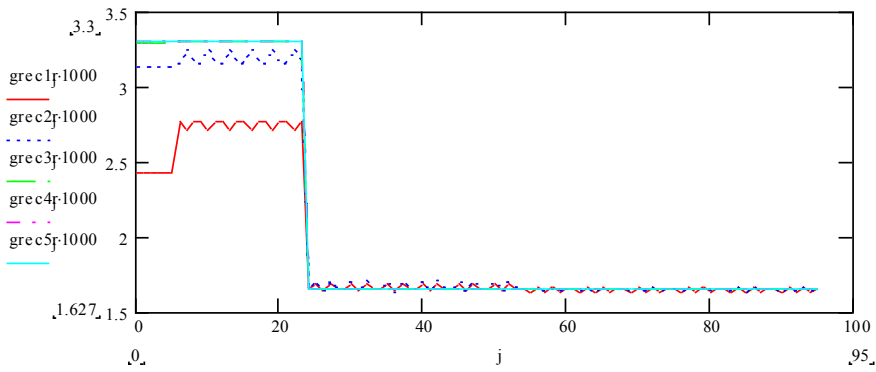


Рис. 3. Реконструйований розподіл провідності на всіх п'яти ітераціях для другої моделі

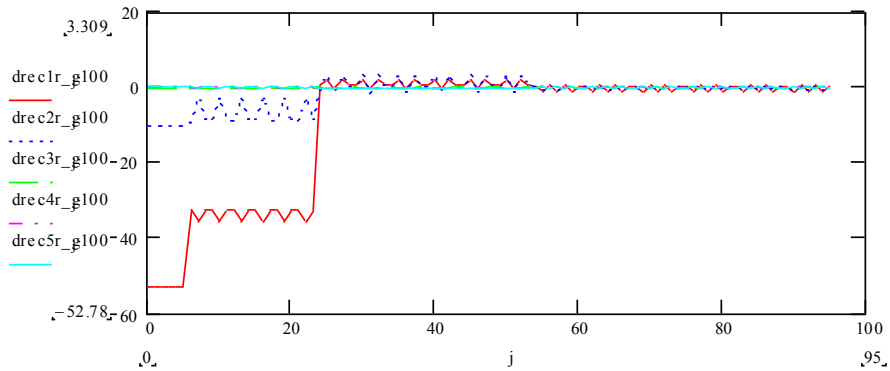


Рис. 4. Розподіл похибок реконструкції на всіх п'яти ітераціях для другої моделі

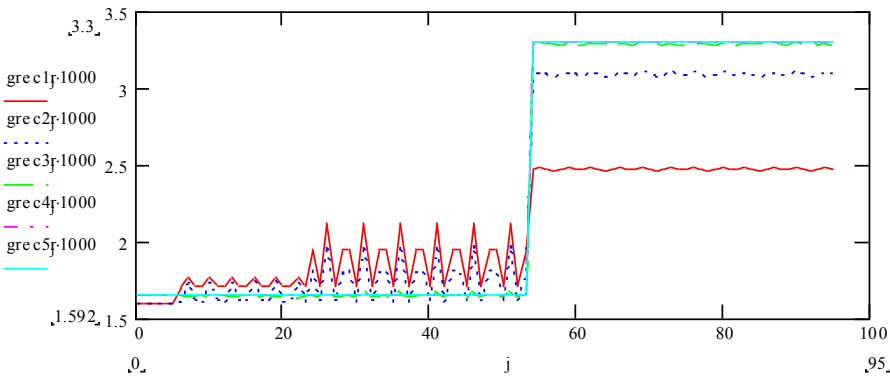


Рис. 5. Реконструйований розподіл провідності на всіх п'яти ітераціях для четвертої моделі

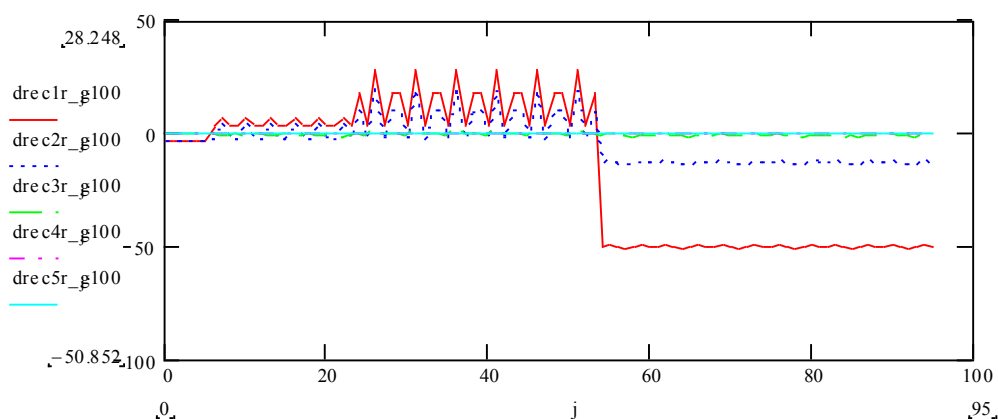


Рис. 6. Розподіл похибок реконструкції на всіх п'яти ітераціях для четвертої моделі

**5. Висновок.** Щоб позбавитись методичної похибки або зробити її нехтовно малою (близько  $10^{-3}$ ) достатньо виконати чотири ітерації. На першій ітерації максимальна похибка реконструкції для другої моделі (реконструкція у разі стрибка провідності перших двох шарів елементів) близько 52,8%, для четвертої моделі (реконструкція у разі стрибка провідності зовнішніх елементів) близько 50,9%, то на п'ятій ітерації для обидвох моделей похибка дорівнює 0,004%.

1. Дорожовець М., Петровська І.Р. Використання методу вузлових напруг в томографії електричної провідності // Вісник ДУ "Львівська політехніка". – № 366. –

С.62–67. 1999 р. 2. Дорожовець М., Петровская И. Методика решения прямой и обратной задачи томографии электрической проводимости / *Metody i technika przetwarzania sygnalow w pomiarach fizycznych. Materiały VI międzynarodowego seminarium metrologów. Lwow -Sławsko 17-19.6.1998, Rzeszow 26–28.10. – 1998. – С.195–199.* 3. Дорожовець М. Використання теореми варіацій для розрахунку матриці Якобі для оберненої задачі електричної томографії // Науково-технічний збірник ФМІ ім.Карпенка Карого НАН України "Відбір і передача інформації". – 2003. – № 18. – С.34–39. 4. Орнатский П.П. Теоретические основы информационно-измерительной техники. – К., 1984.