

ОЦІНКА ТОЧНОСТІ ОБРОБКИ ІНФОРМАЦІЇ У РАЗІ ВИКОРИСТАННЯ ТРАНСФОРМАЦІЙ ШВИДКОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

© Буняк Олег, Микулик Петро, Тиш А., 2006

Тернопільський державний технічний університет імені І. Пулюя,
вул. Руська, 56, Тернопіль, Україна

Запропоновано алгоритм оцінки точності обробки інформації з використанням трансформацій швидкого перетворення Фур'є. Алгоритм ґрунтується на стохастичних методах оцінки.

Предложено алгоритм оценки точности обработки информации с использованием трансформаций быстрого преобразования Фурье. Алгоритм основан на стохастических методах оценки.

In job the algorithm of an estimation of accuracy of processing of the information is offered at use of transformations of fast transformation. The algorithm is based on stochastic methods of estimation.

Вступ. Одним із основних способів визначення параметрів якості електроенергії (ПЯЕ), тобто оцінки ступеня їхньої відповідності встановленим нормам значень ГОСТу 13109-97 є використання трансформацій швидкого перетворення Фур'є (ШПФ) [1, 2]. Ці методи використовували для визначення спектральної щільності, яка є інваріантним ядром, основою, на якій ґрунтується визначення ПЯЕ [3, 4].

Мета досліджень. Дослідження стосується кількісної оцінки похибки вимірювання ПЯЕ з одночасною оцінкою достовірності отриманих результатів, знайдених за заданою кількістю вибірок. Поданий метод ґрунтується на трансформації швидкого перетворення Фур'є.

Виклад основного матеріалу. Оскільки вхідні сигнали несинусоїдні, тобто мають вигляд:

$$U(t) = \sum_{k=1}^M U_k \sin(k\omega t + \psi_k), \quad (1)$$

або в дискретному зображенні:

$$U(n) = \sum_{k=1}^M U_k \sin\left(\frac{2\pi f_k n}{N} + \psi_k\right), \quad (2)$$

де U_k , f_k і ψ_k – відповідно амплітуда, частота та фазовий кут k -ї гармоніки; n – інтервал квантування в часі; $N = \frac{T}{n}$ – кількість вибірок за період T .

Під час обробки таких сигналів виникають похибки від заокруглення та масштабування даних, що пов'язано з вибором кількості розрядників для даних із фіксованою комою [4].

Аналіз останніх досліджень, в яких започатковано розв'язання цієї технічної задачі, засвідчив, що вони належать до класу динамічних [5]. Здебільшого автори для оцінки значення таких похибок використовують статистичні методи, основою яких є метод Монте-Карло [6].

У зв'язку з безперервним розвитком і удосконаленням статистичних методів, застосування їх є перспективним та доцільним. Однак в літературі недостатньо висвітлюється метод кількісного оцінювання похибки вимірювання ПЯЕ з одночасним оцінюванням достовірності отриманих результатів.

Для періодичного несинусоїдного дослідного сигналу найдоцільніше використати такий закон розподілу моментів підрахунку в часі, за якого послідовність вибірок є стаціонарним пуассонівським потоком [7]. У такому разі значення сигналу є сукупністю реалізацій $U(t) = U(t_i)$ періодичного процесу з випадковою фазою.

Дискретне перетворення сигналу (пряме перетворення Фур'є) для сигналу $U(n)$ має вигляд [1, 2]:

$$S(k) = \sum_{k=1}^M U_k e^{-j2\pi nk/N}, \quad (3)$$

або у тригонометричній формі:

$$S(k) = \sum_{k=0}^{M-1} (U_k \cos \frac{2\pi nk}{N} - jU_k \sin \frac{2\pi nk}{N}) = A - jB.$$

Модуль і фазу спектральної щільності визначають так:

$$|S_k| = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}, \quad (4)$$

$$\phi_k = \arctg \frac{A_k}{B_k}.$$

З використанням (4) дійсне значення амплітуди k -ї гармоніки визначають з виразу:

$$U_k = \frac{2|S_k|}{N}. \quad (5)$$

Для заданої кількості гармонік M значення інтегральних характеристик несинусоїдного сигналу, з використанням описаного методу, такі:

$$\bar{U}_{cp} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M U_k; \quad \bar{U} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M U_k^2},$$

де \bar{U}_{cp} , \bar{U} – є статистичні початкові моменти випадкових величин $U(t)$.

Дійсне значення цих характеристик дорівнює:

$$U_{cp} = M[\bar{U}_{cp}], \quad U^2 = M[\bar{U}^2], \quad (6)$$

де $M[\bar{U}_{cp}]$, $M[\bar{U}^2]$ – відповідно математичні сподівання \bar{U}_{cp} , \bar{U}^2 .

Отже, вирішення питання про точність методу, що досліджується, зводиться, власне до оцінки достовірності того, що відхилення середнього значення випадкової величини, знайденого за цими вибірками п незалежних експериментів, від математичного сподівання, не буде виходити за межі похибки Δ .

Така оцінка може бути здійснена на підставі твердження центральної граничної теореми [8], що має вигляд:

$$P(|\bar{X}| - M[\bar{X}] < \Delta) \approx \phi\left(\Delta \frac{\sqrt{n}}{\sigma_x}\right), \quad (7)$$

де $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ – статистичні початкові моменти випадкової величини X ; $P(|\bar{X}| - M[\bar{X}] < \Delta) = \alpha(\bar{X})$ – ймовірність того, що модуль відхилення \bar{X} від $M[\bar{X}]$ не перевищує Δ ; σ_x – середньоквадратичне відхилення X ; $\phi\left(\Delta \frac{\sqrt{n}}{\sigma_x}\right)$ – інтеграл ймовірностей.

Вираз (6) перетвориться на рівність лише якщо $n = \infty$, однак досліджено, що вже при $n > 100$ допустиме наближення незначне. Тому в умові розв’язуваної задачі це співвідношення може бути використане.

Як видно із виразу (7), для одержання залежності, що нас цікавить, необхідно знайти значення $D[\bar{X}] = \frac{M[U^4(t)] - M^2[U^2(t)]}{n}$ середньоквадратичного відхилення випадкової величини X . Останнє однозначно пов’язане з дисперсією $D[\bar{X}]$ таким співвідношенням [8]:

$$\sigma_x = \sqrt{nD[\bar{X}]}. \quad (8)$$

Підставляючи (8) в (7), одержимо:

$$\alpha(\bar{X}) = P(|\bar{X}| - M[\bar{X}] < \Delta) = \phi\left(\Delta \frac{1}{\sqrt{D[\bar{X}]}}\right). \quad (9)$$

Відомо [5], що дисперсія початкового статистичного моменту k -го порядку випадкової величини

X $\bar{m}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$ визначається як $D_{mk} = \frac{(m_{2k} - m_k^2)}{n}$, де $m_k = M[\bar{m}_k] = M[X^k]$.

Для нашого випадку, коли $X = U(t)$ – це сукупність реалізацій періодичного процесу з випадковою фазою, значення $M[X^k]$ можуть бути визначені як середнє за період значення періодичної функції $U^k(t)$.

Необхідні для аналізу значення початкових моментів $M[U(t_i)]$, $M[U^2(t_i)]$, $M[U^4(t_i)]$ можуть бути знайдені з урахуванням (1):

$$M[U(t_i)] = \frac{1}{T} \int_0^T U(t) dt = U_0;$$

$$M[U^2(t_i)] = \frac{1}{T} \int_0^T U^2(t) dt = U_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k^2;$$

$$M[U^4(t_i)] = \frac{1}{T} \int_0^T U^4(t) dt = U_0^4 + \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{\infty} U_k^4 + 2 \sum_{\substack{q=0, p=0 \\ q \neq p}}^{\infty} U_p^2 U_q^2,$$

де U_k – діюче значення k -ї гармоніки напруги;

$U_k = \frac{U_{mk}}{\sqrt{2}}$; U_0 – стала складова напруги; T – період першої гармоніки сигналу.

Використовуючи одержані у такий спосіб значення початкових моментів величин \bar{U}_{cp} , \bar{U} , визначимо дисперсії

$$D[\bar{U}_{cp}] = \frac{M[U^2(t_i)] - M^2[U(t_i)]}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} U_k^2; \quad (10)$$

$$D[\bar{U}]^2 = \frac{M[U^4(t_i)] - M^2[U^2(t_i)]}{n} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} U_k^4 + \sum_{\substack{p=1, q=1 \\ p \neq q}}^{\infty} U_p^2 U_q^2 \right)$$

$$D[\bar{U}] = \frac{M[U^4(t_i)] - M^2[U^2(t_i)]}{n} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} U_k^4 + \sum_{\substack{p=1, q=1 \\ p \neq q}}^{\infty} U_p^2 U_q^2 \right). \quad (11)$$

Підставляючи знайдені значення дисперсій у вираз (9), з урахуванням прийнятих зазначень одержимо необхідні залежності:

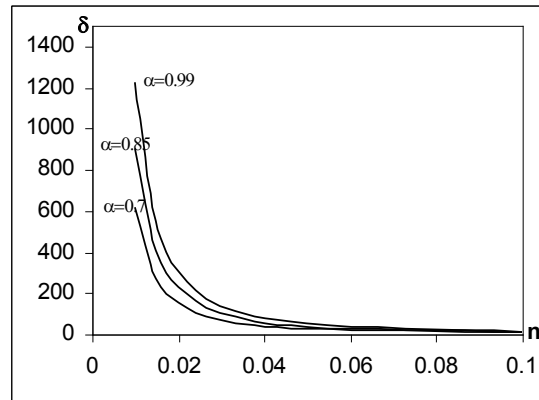
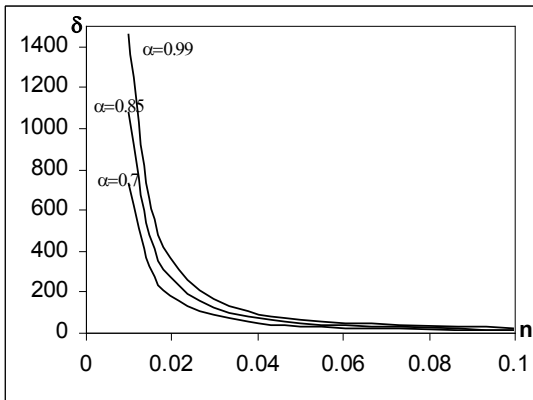
$$\alpha(\bar{U}_{cp}) = \phi \left(\frac{\Delta \sqrt{n}}{\sum_{k=1}^{\infty} U_k^2} \right), \tag{12}$$

$$\alpha(\bar{U}^2) = \phi \left(\frac{\Delta \sqrt{n}}{\sqrt{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} U_k^4 + \sum_{\substack{p=1, q=1 \\ p \neq q}}^{\infty} U_p^2 U_q^2}} \right). \tag{13}$$

Варто відзначити таке. У виразі (13) наявна величина $\Delta = |\bar{U}^2 - U^2|$. У практичних розрахунках зручніше користуватись величиною $\Delta_t = |\bar{U} - U|$. Нехтуючи величиною другого порядку малості, запишемо $\Delta = 2\Delta_t$.

З урахуванням останнього вираз (13) може бути записаний як:

$$\alpha(\bar{U}) = \phi \left(\frac{2\Delta_t U \sqrt{n}}{\sqrt{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} U_k^4 + \sum_{\substack{p=1, q=1 \\ p \neq q}}^{\infty} U_p^2 U_q^2}} \right). \tag{14}$$



Графік залежності похибки вимірювання від кількості вибірок для:
а) діючого значення напруги; б) середньовипрямленого значення напруги

Результати обчислень

α	δ	Вимірювання діючого значення напруги (\bar{U})	Вимірювання середньовипрямленого значення напруги (U_{cp})
		Кількість вибірок (n)	Кількість вибірок (n)
1	2	3	4
0.7	0.01	730	612
	0.015	324	272

І на закінчення розглянемо характер залежностей між α , $\Delta(\Delta_t)$ та n при вимірюванні інтегральних характеристик синусоїдного сигналу: $U(t) = U_m \sin(\omega t)$ з використанням залежностей (3), (4) та (5).

У разі вимірювання середньовипрямленого значення вхідний сигнал описується рівнянням (1), або [9]:

$$U(n) = U_m \left[\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{2kfn}{(2k-1)(2k+1)} \right].$$

Вирази (12) та (14) наберуть вигляду:

$$\alpha(\bar{U}_{cp}) = \phi \left(\frac{\Delta \sqrt{n}}{0.387 U_{cp}} \right) = \phi(2.59 \delta_{cp} \sqrt{n}); \tag{15}$$

$$\alpha(\bar{U}) = \phi \left(\frac{2\Delta_t U \sqrt{2n}}{U^2} \right) = \phi(2\delta \sqrt{2n}), \tag{16}$$

де δ_{cp} , δ – відносні похибки вимірювання відповідно середньовипрямленого та діючого значення напруги.

Результати обчислень виконаних на основі рівностей (15) та (16), подано в таблиці. Обчислювання здійснювались з використанням математичного пакета MathCAD. Графічні залежності між величинами таблиці для діючого та середньовипрямленого значення напруг показані на рисунку а, б.

Продовження таблиці

1	2	3	4
	0.02	182	153
	0.03	81	68
	0.05	29	24
	0.1	7	6
0.85	0.01	1077	903
	0.015	478	401
	0.02	269	225
	0.03	119	100
	0.05	43	36
	0.1	10	9
0.99	0.01	1461	1225
	0.015	649	544
	0.02	365	306
	0.03	162	136
	0.05	58	49
	0.1	14	12

Висновки. У роботі запропоновано алгоритм визначення похибки вимірювання з використанням трансформацій швидкого перетворення Фур'є. Враховували такі параметри: кількість вибірок n при дискретизації несинусоїдної напруги мережі $U(t)$ за період T та ймовірності того, що відхилення вимірного значення напруги від математичного сподівання не буде виходити за межі заданої похибки δ .

Порівнюючи дані, подані в таблиці з наведеними в літературі [10], що характеризують точність методу Монте-Карло, можна відзначити, що в останньому випадку для забезпечення заданих похибок і достовірності результату необхідна велика кількість вибірок. Це дає змогу стверджувати про доцільність практичного використання розглядуваного методу.

1. Буняк А.М., Тиш А.І. Дослідження алгоритму Гуда-Томаса для визначення несинусоїдності змінної напруги електричної мережі // Вісник Тернопільського державного технічного університету імені Івана Пулюя-2003, том 8, №2.-С.105-110. 2. Буняк А.М., Шелестовский Б.Г. Выбор

оптимального алгоритма для определения параметров качества электроэнергии вычислительными устройствами // Изв. вузов СССР – Энергетика, 1984. – №10. – С.21–25. 3. Буняк А.М. Использование дискретного преобразования Фурье для определения параметров качества электроэнергии вычислительными устройствами // Изв. вузов СССР – Энергетика, 1982.– №6. – С.7–12. 4. Белый А.А., Бовбель Е.И., Микулович В.И. Алгоритмы быстрого преобразования Фурье и их свойства. Советское радио, “Зарубежная радиоэлектроника”, 1979.– №2. – С.3–29. 5. Чехонадский Н.А. О возможности общего подхода к анализу статистических и динамических погрешностей // Измерительная техника, 1999.– №3. 6. Волгин Л.И. Об использовании метода статистических испытаний для измерения эффективного значения напряжений произвольной формы // Автометрия, 1998.– №6.–С.17–21. 7. Бабак В.П., Хандецкий В.С., Шрюфер Е. Обработка сигналов.–К., 1996. 8. Корн Г., Карн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М., 1973. – С.287–305. 9. Ионкин П.А., Соколов А.А., Пащуканис В.Е. и др. Основы инженерной электрофизики. – М., 1972. 10. Бусленко Н.П., Шрейдер Ю.А. Метод статистических испытаний. – М., 1961.