КОРОТКІ ПОВІДОМЛЕННЯ

ВАРІАЦІЙНИЙ ПРИНЦИП ГАМІЛЬТОНА–ОСТРОГРАДСЬКОГО В ТЕРМОДИНАМІЦІ

© Чабан Василь[1,2], Чабан Андрій[1], 2006

[1]Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра теоретичної і загальної електротехніки
вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013
[2]Ряшівський університет,
вул. Рейтана, Ряшів 35-310, Польща,

Адаптовано принцип Гамільтона – Остроградського на дисипативні системи. Рівняння нестаціонарної теплопровідности одержані на підставі спільного варіаційного принципу залежно від використовуваної повної енергії системи, що зосереджена в зоні інтеґрування. Гамільтонова дія трактується як функціонал відповідних диференціальних рівнянь.

Адаптирован принцип Гамильтона - Остроградского на диссипативныые системы. Уравнения нестационарной теплопроводности получены, исходя из этого принципа в зависимости от использованой полной энергии системы, которая сосредоточена в области интегрирования. Гамильтоново действие рассматривается как функционал соответствующих дифференциальных уравнений.

In the paper is adapted Hamilton-Ostrohradsky principle on dissipative systems. The equation of heat conduction is received on base of this principle depending on using of full system energy which is located in space of integration zone. The Hamilton's actions are interpreted as functional of corresponding differential equations.

1. Вступ. Теплові процеси у будь-якій фізичній системі найчастіше відбуваються за рахунок теплопередачі, яка відбувається в суцільних середовищах. Фізичний процес у такому разі описується диференціальними рівняннями з частинними, або змішаною системою рівнянь зі звичайними й частинними похідними разом. Зазвичай до тієї чи іншої системи рівнянь приходять різними шляхами. Йдеться не тільки про методи термодинаміки, електротехніки, механіки як фундаментальні науки різного фізичного походження, але й про методи всередині цих наук. Але відомо, що в теоретичній фізиці існує надійний інтеґральний варіаційний принцип Гамільтона–Остроградського, який уможливлює об'єднання всіх цих розрізнених методів і подання їх як єдиного стрункого математичного апарата аналізу процесів найрізноманітнішого походження: термодинамічних, електричних, механічних тощо. Вихідним пунктом тут є повна енергія системи. Якщо її вдається записати, то подальший етап зводиться до формальних математичних перетворень.

Рівність Гамільтона–Остроградського пов'язана з варіацією інтеґрала

$$\delta\int_A^B L dt = \delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \qquad (1)$$

де

$$L = T - P \qquad (2)$$

– функція Лаґранжа, як різниця кінетичної (T) і потенціальної (P) енергій; A, B – дві точки S-вимірного простору, що відповідають двом положенням системи в різні моменти часу. Сам інтеґрал ще називають *дією за Гамільтоном.*

Принцип Гамільтона–Остроградського можна сформулювати в такий спосіб: *дійсний рух системи між двома заданими її положеннями відрізняється від можливих рухів, здійснюваних за той самий час між тими самими заданими положеннями, тим, що для дійсного руху дія за Гамільтоном мінімальна.*

Узагальнимо (2) на випадок дисипативних систем. За наявности сил дисипації (Φ – дисипативна функція) і збурювальних сил (D – функція зовнішньої дії) вираз (2) потрібно ускладнити [1]

$$L = T - P + \Phi - D. \qquad (3)$$

На підставі (1), (3) ми одержали диференціальні такі рівняння: механічного руху зосереджених мас, валопроводу, електричного контуру, однорідної лінії, вектор-потенціалу електромаґнетного поля.

2. Рівняння нестаціонарної теплопровідности.

Енерґії теплового поля, зосереджені в об'ємі V області інтеґрування, запишемо як

$$T = \int_V \frac{\lambda(\nabla\Theta)^2}{2} dV; \quad P = 0; \quad \Phi = \int_V \frac{C\rho b^2}{2} dV: \quad D = 0, \qquad (4)$$

де Θ – термодинамічна температура; λ – матриця теплопровідностей; c – теплоємність; ρ – питома вага; b – швидкість теплового потоку; ∇ – оператор набла.

Причому

$$b = \partial\Theta / \partial t . \tag{5}$$

Утворимо функціонал термодинамічної температури з чотирма незалежними змінними

$$I = \int_V L(x, y, z, \Theta, \Theta^x, \Theta^y, \Theta^z, \Theta^t) dV , \tag{6}$$

де x, y, z – незалежні змінні; Θ – змінна, залежна від x, y, z, t; $\Theta^x, \Theta^y, \Theta^z, \Theta^t$ – перші частинні похідні Θ за x, y, z, t.

Довільній безмежно малій зміні $\Theta(x, y, z, t)$ відповідає варіація функціонала

$$\delta I = \int_V \left(\frac{\partial L}{\partial \Theta} \delta\Theta + \frac{\partial L}{\partial \Theta^x} \delta\Theta^x + \frac{\partial L}{\partial \Theta^y} \delta\Theta^y + \frac{\partial L}{\partial \Theta^z} \delta\Theta^z + \frac{\partial L}{\partial \Theta^t} \delta\Theta^t \right) dV. \tag{7}$$

Якщо врахувати, що

$$\delta\Theta^s = \frac{d}{ds}(\delta\Theta), \quad s = x, y, z, t, \tag{8}$$

то одержимо

$$\delta I = \int_V \left(\frac{\partial L}{\partial \Theta}(\delta\Theta) + \frac{\partial L}{\partial \Theta^x} \frac{\partial}{\partial x}(\delta\Theta) + \frac{\partial L}{\partial \Theta^y} \frac{\partial}{\partial y}(\delta\Theta) + \frac{\partial L}{\partial \Theta^z} \frac{\partial}{\partial y}(\delta\Theta) + \frac{\partial L}{\partial \Theta^t} \frac{\partial}{\partial t}(\delta\Theta) \right) dV . \tag{9}$$

Інтеґруючи по частинах другий доданок у (9) і застосовуючи формулу Остроградського, матимемо

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial L}{\partial \Theta^x} \frac{\partial}{\partial x}(\delta\Theta) dV &= \int_V \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial \Theta^x} \delta\Theta \right) dV - \int_V \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial \Theta^x} \right) \delta\Theta dV = \\ &= \int_S l_x \frac{\partial L}{\partial \Theta^x} \delta\Theta dS - \int_V \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial \Theta^x} \right) \delta\Theta dV, \end{aligned} \tag{10}$$

де l_x – напрямний косинус нормалі до поверхні з віссю x.

Перетворюючи так само інші доданки у (9) і об'єднуючи результати інтеґрування, знаходимо

$$\delta I = \int_V \left[\frac{\partial L}{\partial \Theta} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial \Theta^x} \right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial L}{\partial \Theta^y} \right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial L}{\partial \Theta^z} \right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \Theta^t} \right) \right] \delta\Theta dV + \int_S \left[l_x \frac{\partial L}{\partial \Theta^x} + l_y \frac{\partial L}{\partial \Theta^y} + l_z \frac{\partial L}{\partial \Theta^z} \right] \delta\Theta dS. \tag{11}$$

Мінімальне значення I одержуємо лише за умови, що обидва інтеґрали в (11) перетворюються на нуль. Виконання цих вимог уможливлює запис диференціальних рівнянь і крайових умов, котрим задовольняє шукана функція. Водночас співвідношення (11) відповідає варіаційному формулюванню задач теорії теплопровідности. Воно встановлює, що функція, котра надає мінімальне значення цьому функціоналу, повинна задовольняти такому диференціальному рівнянню

$$\frac{\partial L}{\partial \Theta} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial \Theta^x} \right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial L}{\partial \Theta^y} \right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial L}{\partial \Theta^z} \right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \Theta^t} \right) = 0 . \tag{12}$$

Між іншим, якщо в (12) знехтувати доданками з просторовими похідними, а термодинамічну температуру трактувати як узагальнену координату ($\Theta = q$), а швидкість теплового потоку як узагальнену швидкість ($b = \dot{q}$). то можна отримати рівняння Лаґранжа другого роду, застосовні до систем з обмеженою кількістю свобод

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0, \quad k = 1, 2, ..., n . \tag{13}$$

Підставляючи (4) в (3), а одержаний результат у (12), одержимо відомі рівняння нестаціонарної теплопровідности, до яких приходять, виходячи з основних законів термодинаміки,

$$C\rho \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \nabla \cdot \lambda(\nabla\Theta) . \tag{14}$$

Якщо в області інтеґрування знаходяться точкові джерела, наприклад, ґенеровані електромаґнетним полем $p = \gamma E^2$, де E – модуль вектора напружености електричного поля, а γ – питома електропровідність, то їх достатньо внести в праву частину (14)

$$C\rho \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \nabla \cdot \lambda(\nabla\Theta) + p. \tag{15}$$

Чабан В. Електромаґнетне поле. – Львів, 2006.