УДК 519.9

АПРОКСИМАЦІЯ СТАНДАРТНИХ ФУНКЦІЙ МІЖНАРОДНОЇ ТЕМПЕРАТУРНОЇ ШКАЛИ МТШ-90 ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ЧЕБИШОВСЬКИХ СПЛАЙНІВ

© Воробель Роман[1], Гук Олександр[2], Камінський Юрій[3], Сущик К.[1], 2006

[1]Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України,
вул. Наукова, 5, Львів
[2]НВО "Термоприлад", вул. Наукова, 3, Львів
[3]Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів

Запропоновано метод знаходження балансних наближень стандартних функцій міжнародної температурної шкали МТШ–90. Отримані результати дають змогу спростити аналітичний вираз для обчислення при його технічній реалізації та вибирати параметри наближень оптимальними щодо забезпечення необхідної точності вимірювання температури у заданому діапазоні.

Предлагается метод поиска балансных приближений стандартных функций международной температурной шкалы МТШ–90. Полученные результаты позволяют упростить аналитическое выражение для его расчета при технической реализации и выбрать параметры приближения оптимальным способом для обеспечения необходимой точности измерения температуры в заданном диапазоне.

A method for obtaining of balanced approximation of standard functions of International Temperature Scale ITS–90 is proposed. The results obtained allow to simplify analytical expression for technical implementation and to choose optimal approximation parameters regarding necessary accuracy of temperature measurement at the given interval.

1. Вступ. Відповідно до положення про Міжнародну температурну шкалу 1990 р. (МТШ–90) [1] в Україні упродовж 1995–1998 рр. впроваджено державні первинні еталони одиниці температури:

– державний первинний еталон одиниці температури кельвін в діапазоні від 13,80 до 273,16 К (ДЕТУ 06-06-98);

– державний первинний еталон одиниці температури кельвін в діапазоні від 273,16 до 1357,77 К (ДЕТУ 06-05-98);

– державний первинний еталон одиниці температури за випромінюванням в діапазоні від 1357,77 К до 2800 К (ДЕТУ 06-03-96).

Для забезпечення єдності вимірювань в галузі термометрії одночасно з введенням державних, а також вторинних і робочих еталонів одиниці температури розроблено і впроваджено два державні стандарти: ДСТУ 3742–98 "Державна повірочна схема для засобів вимірювання температури. Контактні засоби вимірювання температури" та ДСТУ 3194–95 "Державна повірочна схема для засобів вимірювання температури за випроміненням".

Оскільки МТШ–90 ґрунтується на низці відтворюваних рівноважних станів, яким приписані встановлені значення температури (основні реперні точки) і на еталонних приладах, які градуюються на цих температурах, то в кожному із інтервалів між значенням реперних точок інтерполяція здійснюється згідно з положеннями МТШ–90 за стандартними функціями, які встановлюють зв'язок між показниками еталонних приладів і значеннями міжнародної температури.

В основі міжнародної температурної шкали лежить експериментально отримана стандартна функція $W_r(T)$, задана у вигляді полінома. Однак використання поліноміального описання в практиці ускладнюється його обчислювальною громіздкістю, зумовленою високим порядком полінома. Фактично у побудові термометрів використовують обернені до градуювальної характеристики функції. Так, наприклад, точне описання функції оберненої до стандартної функції МТШ-90 в діапазоні від 13.8033 К до 273.16 К записується поліномом п'ятнадцятого степеня [1].

У зв'язку з цим актуальною є проблема ефективніших методів запису температурних залежностей у аналітичному вигляді. Для цих потреб доцільно використовувати балансні наближення сплайнами, кожна ланка яких є найкращим чебишовським наближенням, а похибка досягає максимального значення на кожній ланці сплайну. Такі наближення є оптимальними, тобто за заданої кількості ланок вони наближають функцію з мінімальною похибкою, а за заданої похибки мають мінімальну кількість ланок.

2. Рівномірні наближення чебишовськими сплайнами. Розглянемо наближення функції $f(x)$ на проміжку $[a,b]$ чебишовським сплайном

$$S(F,x)=\sum_{i=1}^{r}F(A_i,x)\theta((x-z_{i-1})(z_i-x)), \qquad (1)$$

де $\theta(x)$ – функція Хевісайда; $Z=\{z_i\}_{i=0}^{r}$ – множина вузлів сплайна; $F(A_i,x)=F(a_{0i},a_{1i},..a_{mi};x)$ – функція наближення.

Виберемо функцію $F(A,x)$ у вигляді

$$F(A,x)=g(x)\varphi(V_{k,l}(A,x)), \qquad (2)$$

де $\varphi(x)\in C^{\infty}[a,b], \varphi(x)$ – монотонна на $[a,b]$, $g(x)\in C^1[a,b], g(x)\neq 0$ на $[a,b]$;

$$V_{k,l}(A,x)=x^s R_{k,l}(A,x^p)=x^s\,\frac{\sum_{j=0}^{k}a_j x^{jp}}{1+\sum_{j=1}^{l}b_j x^{jp}}.$$

3. Ядро наближення та оцінка похибки . Відомо, що у разі виконання умови $f(x)\in C^{m+1}[a,b], f(x)\neq 0$ максимальна похибка найкращого чебишовського наближення многочленом $P_m(x)$ на інтервалі $[a,b]$ має вигляд

$$\mu=\frac{\left|f^{(m+1)}(\xi)\right|(b-a)^{m+1}}{2^{2m+1}(m+1)!}. \qquad (3)$$

Припустимо, що при виконанні певних умов для довільного виразу наближення $F(A,x)$, залежного від параметрів $A=(a_0,\ldots,a_m)$, максимальна похибка найкращого чебишовського наближення функції $f(x)$ на інтервалі $[a,b]$ може бути записана як

$$\mu=\frac{\eta(f(\xi),F)(b-a)^{m+1}}{2^{2m+1}(m+1)!}. \qquad (4)$$

При виконанні рівності (4) вираз $\eta(f(\xi),F)$ називається ядром наближення функції $f(x)$ виразом $F(A,x)$. Загалом вираз ядра залежить від *m+1* похідних функції, що наближується:

$$\eta(f(\xi),F)=\phi(f'(x),f''(x),\ldots,f^{(m+1)}(x),F).$$

Відомо [2], що коли ядро наближення $\eta(f,F)\neq 0$, якщо $x\in[a,b]$, то максимальна похибка рівномірного наближення функції $f(x)\in C^{m+2}[a,b]$ ($m=k+l$) чебишовським сплайном (1) із заданою кількістю ланок r має вигляд

$$\mu=\frac{r^{-m-1}}{2^{2m+1}(m+1)!}\left(\int_a^b\left|\frac{\eta(f,F)}{w(x)}\right|^{\frac{1}{m+1}}dx\right)^{m+1}\left[1+O\left(\frac{b-a}{r}\right)\right].$$

4. Знаходження границь ланок сплайна. Щоб визначити границі ланок $Z=\{z_i\}_{i=0}^{r}$ $(z_i<z_{i+1}, i=0,1,..,r,$ $z_0=a, z_r=b)$ при балансному наближенні функції $f(x)\in C^{(m+1)}[a,b]$ сплайном з $r(r\to\infty)$ ланками – найкращими чебишовськими многочленними наближеннями степеня m – Г.Мейнардус [6] запропонував ітераційну формулу для розв'язування системи *(r–1)*-го рівняння із *(r–1)*-м невідомим $z_i\,(i=1,2,\ldots,r-1)$:

$$z_i^{(t)}=\frac{z_{i+1}^{(t-1)}\varphi\left(\frac{z_i^{(t-1)}+z_{i+1}^{t-1}}{2}\right)+z_{i-1}^{(t)}\varphi\left(\frac{z_i^{t-1}+z_{i-1}^{t}}{2}\right)}{\varphi\left(\frac{z_i^{(t-1)}+z_{i+1}^{t-1}}{2}\right)+\varphi\left(\frac{z_i^{t-1}+z_{i-1}^{t}}{2}\right)}, \qquad (5)$$

де $\varphi(x)=\left|f^{(m+1)}(x)\right|^{1/(m+1)}$, величина Z_i є черговим значенням z_i; початкові значення точок z_i поділяють проміжок $[a,b]$ на рівні частини. Ітераційна формула (1) може збігатися, якщо функція $\varphi(x)$ не змінює знака на проміжку $[a,b]$. Відоме [4] узагальнення (1) для наближення сплайном з ланками $F(A,x)=F(a_0,\ldots,a_m,x)$. Функція $\varphi(x)$ набуває вигляду $\varphi(x)=\left|\eta(f(x),F(A,x))/w(x)\right|^{1/(m+1)}$, де $\eta(f(x),F(A,x))$ – ядро наближення функції $f(x)$

виразом $F(A,x)$; $w(x)$ –вага наближення. Ядро наближення знаходять методами, викладеними в [2,3].

Формулу (5) можна отримати з умови рівності похибки на ланках, застосувавши до кожної з них вираз (2) та замінивши інтегрування квадратурною формулою прямокутників.

Для підвищення точності ітераційної формули застосуємо тут замість формули прямокутників квадратурну формулу Сімпсона. Так виведена нова ітераційна формула для знаходження границь заданої кількості ланок сплайну при балансному наближенні:

$$z_i^{(t)} = \frac{z_{i-1}^{(t-1)}\left(\varphi\left(z_{i-1}^{(t-1)}\right)+4\varphi\left(\frac{z_{i-1}^{(t-1)}+z_i^{t-1}}{2}\right)+\varphi\left(z_i^{(t-1)}\right)\right)+z_{i+1}^{(t)}\left(\varphi\left(z_i^{(t-1)}\right)+4\varphi\left(\frac{z_i^{(t-1)}+z_{i+1}^{t-1}}{2}\right)+\varphi\left(z_{i+!}^{(t-1)}\right)\right)}{\varphi\left(z_{i-1}^{(t-1)}\right)+4\varphi\left(\frac{z_{i-1}^{(t-1)}+z_i^{t-1}}{2}\right)+2\varphi\left(z_i^{(t-1)}\right)+4\varphi\left(\frac{z_i^{(t-1)}+z_{i+1}^{t-1}}{2}\right)+\varphi\left(z_{i+1}^{(t-1)}\right)}. \qquad (6)$$

Приклад 1. Згідно з МТШ-90 функція $W_r(T)$ в діапазоні від 0° C до 961.78° C задана у вигляді

$$W_r(T_{90}) = C_0 + \sum_{i=1}^{9} C_i \left(\frac{T_{90}/K - 754.15}{481}\right)^i,$$

де T_{90}/K – температура у кельвінах, а значення сталих коефіцієнтів C_i наведені в таблиці.

Значення коефіцієнтів стандартних функцій для еталонного платинового термометра опору

C_0	2.78157254	D_0	439.932854
C_1	1.64850916	D_1	472.418020
C_2	–0.13714390	D_2	37.684494
C_3	–0.00649767	D_3	7.472018
C_4	–0.00234444	D_4	2.920828
C_5	0.00511868	D_5	0.005184
C_6	0.00187982	D_6	–0.963864
C_7	–0.00204472	D_7	–0.188732
C_8	–0.00046122	D_8	0.191203
C_9	0.00045724	D_9	0.049025

Знайти апроксимаційне представлення поліноміальним чебишовським сплайном з двох ланок та порядком многочлена m=2 на кожній ланці.

Отримуємо сплайн:

$$s(T) = \begin{cases} 0. & T < 273.16 \\ -.13215592 + (.0043047590 - .58508919\ 10^{-6}\ T)\ T & T \le 879.3535668 \\ -.14529373 + (.0043409062 - .60920869\ 10^{-6}\ T)\ T & T \le 1234.94 \\ 0. & 1234.94 < T \end{cases}$$

Абсолютна похибка наближення $\mu = 0.000076$.

Приклад 2. Згідно з МТШ-90 обернена стандартна функція для еталонного платинового термометра опору задана у вигляді

$$T_{90}/K - 273.15 = D_0 + \sum_{i=1}^{9} D_i \left(\frac{Wr(T_{90}) - 2.64}{1.64}\right)^i$$

де T_{90}/K – температура у кельвінах, а значення сталих коефіцієнтів D_i наведені в таблиці.

Знайти апроксимаційне представлення поліноміальним чебишовським сплайном з трьох ланок та порядком многочлена m=2 на кожній ланці.

Отримуємо сплайн:

$$p(Wr) = \begin{cases} 0. & Wr < 1. \\ 34.1848 + (228.091 + 10.9438\,Wr)\,Wr & Wr \le 2.361544245 \\ 58.9127 + (207.418 + 15.2848\,Wr)\,Wr & Wr \le 3.337138682 \\ 132.445 + (163.430 + 21.8739\,Wr)\,Wr & Wr \le 4.2865 \\ 0. & 4.2865 < Wr \end{cases}$$

Абсолютна похибка наближення $\mu = 0.058$.

Висновки. Отримані результати ілюструють доцільність застосування наближення запропонованими сплайнами для подання градуювальних характеристик. Застосування сплайнів низьких порядків дало змогу спростити аналітичне подання характеристики і зробити її придатнішою для апаратної реалізації за рахунок зниження вимог до точності подання параметрів апроксимувального виразу.

1. Techniques for Approximating the International Temperature Scale of 1990. BIPM. Sèvres, France,1990. 2. Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами. – К., 1986. 3. Попов Б.О., Сущик К.В. Дослідження збіжності ітераційної процедури для знаходження балансного наближення // Відбір і обробка інформ. – 2000. – Вип. 16(92). – С. 137-141. 4. Температурые измерения. Справочник // О.А. Геращенко, А.Н. Гордов, В.И. Лах, Б.И. Стаднык, Н.А. Ярышев – К., 1984.