

transform.// *Pattern Recognition letters*. – 2002. – , V.23. – N.8. – P.1039–1049. 16. Fischler M.A., Bolles R.C. *Random Sample Consensus: A paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography*//*CACM*, 24. – 1981. – P.382–395. 17. Turan J., Farkash P. *Line fitting using Hough-like Procedure*// *Radioengineering*. – 2001. – Vol.10. – No.1. – P.25–30. 18. Шульга В.И. *Комплекс помехоустойчивых*

процедур аппроксимации контурных границ и распознавания объектов на контурных изображениях (исследовательская разработка)// *Институт кибернетики имени В.М. Глушкова АН Украины, Киев, 1992, 75 стр./Депонировано во Всесоюзном институте научной и технической информации (ВИНИТИ), Москва, 04.01.92, №12-В92. <http://shulga.tripod.com/GEOLIN/ghnfl1.htm>.*

УДК 62-492.2

МОДЕЛЬ ВИМІРЮВАННЯ РОЗМІРІВ ПОРОШКОПОДІБНИХ МАТЕРІАЛІВ

©Голдак Андрій, Шаповалов Георгій, 2006

Національний університет “Львівська політехніка”, кафедра інформаційно-вимірювальних технологій,
вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна

Розглянуто моделювання вимірювання розмірів частинок оптичним методом, що ґрунтується на розсіянні світла частинками порошку. Показано результати застосування методу статистичного усереднення до розв’язання інтегрального рівняння, що виникає у разі застосування вибраного методу.

Рассмотрено моделирование измерения размеров частиц оптическим методом, который основан на эффекте рассеяния света частицами порошка. Показаны результаты применения метода статистического усреднения к решению интегрального уравнения, которое возникает при применении этого метода.

The simulation of measuring of particle size distribution based on light scattering method is considered. The results of solving integral equation obtained from the method using statistical averaging are shown.

Вступ. Вимірювання характеристик порошкоподібних матеріалів є важливим у багатьох галузях науки та техніки. Вимірювання розмірів частинок необхідне для виготовлення різноманітних клеїв, лаків, фарб, медичних препаратів тощо. Інформація щодо розмірів частинок потрібна також для дослідження властивостей аерозолів, для визначення та контролю запиленості приміщень. У цій статті розглянуто моделювання визначення розмірів частинок, в розумінні знаходження функції густини ймовірності $\omega(a)$ випадкової величини a , де a – радіус частинки, для вимірювання розмірів сферичних частинок. У першому наближенні можна припустити, що форма частинок, які досліджуються, є сферичною. Моделювання вимірювання $\omega(a)$ ґрунтується на використанні оптичних методів, а саме на кутовій залежності інтенсивності розсіяного світла від властивостей самих частинок.

Постановка задачі. Необхідно визначити $\omega(a)$ для значень a , що коливаються в межах від 1 до 20

мкм. Прикладом частинок, розміри яких лежать в цих межах, є аерозолі та високоякісні цементи [1]. Модель визначення $\omega(a)$ фактично не залежить від розмірів частинок, які досліджуються. Межі зміни радіуса a були вибрані, з урахуванням задач вимірювання розмірів частинок цементів та аерозолів, а також зумовлені довжиною хвилі наявного He-Ne лазера $\lambda = 0.76$ мкм.

Всі параметри електромагнітної хвилі, що можуть бути виміряні без застосування специфічного обладнання, зводяться до визначення складових вектора Стокса [2]. До його складу входять I – інтенсивність світла, та Q , U , V – складові, що визначають стан поляризації світлового пучка. Для визначення $\omega(a)$ достатньо володіти інформацією стосовно розподілу інтенсивності розсіяного світла залежно від кута спостереження.

Наступним кроком у визначенні функції $\omega(a)$ є розв’язання інтегрального рівняння, що пов’язує інтенсивність світла, розсіяного всіма сферичними частинками, з $\omega(a)$. Це рівняння має вигляд:

$$\int_c^d K(\theta, a) \cdot \omega(a) \cdot da = I_s(\theta), \quad (1)$$

де $I_s(\theta)$ – iндикатриса iнтенсивностi розсiяного свiтла залежно вiд кута θ , $K(\theta, a)$ – iнтенсивнiсть свiтла, розсiяного частинкою рiдусом a при кути θ , c та d – межi змiни рiдуса a .

Теоретичнi основи. Для моделювання просторової залежностi розподiлу iнтенсивностi або, iншими словами, iндикатриси розсiяного свiтла, необхідно вибрати вiдповiдну математичну модель розсiяння свiтла частинками. Оскiльки розглядається випадок сферичних частинок, то для моделювання розсiяння свiтла необхідно використовувати теорiю Мi, що точно описує розсiяння свiтла однiєю кулькою. Для того, щоб уможливити застосування теорiї Мi у разi розсiяння свiтла багатьма кульками, необхідно припустити, що кульки розсiюють свiтло незалежно одна вiд одної. Це означає, що вiдстанi мiж кульками є значно бiльшими за iхнi дiаметри. У [3] показано, що кульки розсiюють свiтло практично незалежно одна вiд одної вже тодi, коли вiдстань мiж iхнiми центрами перевищує чотири iхнi дiаметри. Уникнути занадто близького розташування частинок можна, варiюючи вiмiст частинок, що перебувають в зваженому станi, а також перемiщуючи їх безпосередньо перед виконання вимiрювань.

Оскiльки свiтло розсiюється сферами незалежно, то загальна iнтенсивнiсть розсiяного свiтла дорiвнюватиме алгебраiчнiй сумi iнтенсивностей свiтла розсiяного кожною кулькою. Оскiльки частинки зосередженi у невеликому об'ємi, а розсiяне свiтло вимiрюється на значнiй вiдстанi, можна вважати, що кути макроскопiчної сферичної системи координат збiгаються з вiдповiдними кутами систем координат кожної частинки. Для визначення iнтенсивностi свiтла розсiяного окремою частинкою звернемося до теорiї Мi.

Iнтенсивнiсть свiтла дорiвнює модулю вектора Пойнтинга:

$$N_{eln} = \cos \phi \cdot n \cdot (n+1) \cdot \sin \theta \cdot \pi_n(\cos \theta) \cdot \frac{z_n(\rho)}{\rho} \hat{e}_r + \cos \phi \cdot \tau_n(\cos \theta) \cdot \frac{[\rho \cdot z_n(\rho)]'}{\rho} \hat{e}_\theta + \sin \theta \cdot \pi_n(\cos \theta) \cdot \frac{[\rho \cdot z_n(\rho)]'}{\rho} \hat{e}_\phi \quad (7)$$

E_s – напруженiсть електричного поля, H_s^* – комплексно спряжена напруженiсть магнiтного поля. Вираз для E_s та H_s з теорiї Мi має вигляд:

$$\vec{E}_s = \sum_{n=1}^{\infty} E_n (i \cdot a_n \cdot N_{eln}^{(3)} - b_n \cdot M_{oln}^{(3)}), \quad \vec{H}_s = \sum_{n=1}^{\infty} E_n (i \cdot b_n \cdot N_{oln}^{(3)} - a_n \cdot M_{eln}^{(3)}) \quad (3)$$

де $E_n = i^n \cdot E_0 \cdot (2n+1) / [n(n+1)]$,

$$a_n = \frac{\mu m^2 j_n(mx) [x \cdot j_n(x)]' - \mu_1 j_n(x) [mx \cdot j_n(mx)]'}{\mu m^2 j_n(mx) [x \cdot h_n^{(1)}(x)]' - \mu_1 h_n^{(1)}(x) [mx \cdot j_n(mx)]'}$$

$$b_n = \frac{\mu_1 j_n(mx) [x \cdot j_n(x)]' - \mu j_n(x) [mx \cdot j_n(mx)]'}{\mu_1 j_n(mx) [x \cdot h_n^{(1)}(x)]' - \mu h_n^{(1)}(x) [mx \cdot j_n(mx)]'}$$

де μ та μ_1 – магнiтна проникнiсть середовища та частинки вiдповiдно, j_n та h_n – нормованi сферичнi функцiї Бесселя першого та третього роду вiдповiдно,

$m = \frac{N_1}{N}$, де N_1 та N – показники заломлення частинки та середовища вiдповiдно; $x = \frac{2 \cdot \pi \cdot N \cdot a}{\lambda}$,

де a – рiдус частинки, λ – довжина електромагнiтної хвилi, N_{eln} , M_{oln} , N_{oln} та M_{eln} – векторнi сферичнi гармонiки, що дорiвнюють:

$$M_{oln} = \cos \phi \cdot \pi_n(\cos \theta) \cdot z_n(\rho) \hat{e}_\theta - \sin \phi \cdot \tau_n(\cos \theta) \cdot z_n(\rho) \hat{e}_\phi \quad (4)$$

$$M_{eln} = \sin \phi \cdot \pi_n(\cos \theta) \cdot z_n(\rho) \hat{e}_\theta - \cos \phi \cdot \tau_n(\cos \theta) \cdot z_n(\rho) \hat{e}_\phi \quad (5)$$

$$N_{oln} = \sin \phi \cdot n \cdot (n+1) \cdot \sin \theta \cdot \pi_n(\cos \theta) \cdot \frac{z_n(\rho)}{\rho} \hat{e}_r + \sin \phi \cdot \tau_n(\cos \theta) \cdot \frac{z_n(\rho)}{\rho} \hat{e}_\theta + \cos \theta \cdot \pi_n(\cos \theta) \cdot \frac{[\rho \cdot z_n(\rho)]'}{\rho} \hat{e}_\phi + \cos \theta \cdot \tau_n(\cos \theta) \cdot \frac{[\rho \cdot z_n(\rho)]'}{\rho} \hat{e}_\theta \quad (6)$$

$$N_{eln} = \cos \phi \cdot n \cdot (n+1) \cdot \sin \theta \cdot \pi_n(\cos \theta) \cdot \frac{z_n(\rho)}{\rho} \hat{e}_r + \cos \phi \cdot \tau_n(\cos \theta) \cdot \frac{z_n(\rho)}{\rho} \hat{e}_\theta + \sin \theta \cdot \pi_n(\cos \theta) \cdot \frac{[\rho \cdot z_n(\rho)]'}{\rho} \hat{e}_\phi + \sin \theta \cdot \tau_n(\cos \theta) \cdot \frac{[\rho \cdot z_n(\rho)]'}{\rho} \hat{e}_\theta \quad (7)$$

де $\pi_n = \frac{P_n^1}{\sin \theta}$, а $\tau_n = \frac{dP_n^1}{d\theta}$, та P_n^1 – приеднана функцiя Лежандра, $z_n(\rho) = P_n^1(\frac{\rho}{k})$ – одна з сферичних функцiї Бесселя, $\rho = kr$, де k – хвильовий вектор, r – координата

$\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi$ – одиничнi вектори в сферичнiй системi координат.

Пристосування вибраної теорії та основні припущення. Варто зазначити, що ми розглядаємо розсіяне електромагнітне поле у так званій віддаленій зоні – тобто на відстанях, значно більших від розмірів частинок, що досліджуються. Це зумовлено тим, що розміри частинок, з якими ми маємо справу, лежать у межах від одиниць до сотень мікрон, розташування чутливого елемента на таких відстанях є достатньо складною задачею.

Рівняння (2) з урахуванням (3)–(7) зводиться до вигляду:

$$\vec{E}_S \times \vec{H}_S^* = \frac{k^2 \cdot E_0^2}{\omega^2 \cdot \mu^2 \cdot \rho^2} \left[\sin^2 \varphi |S_1|^2 + \cos^2 \varphi |S_2|^2 \right] \quad (8)$$

де $S_1 = \sum_n \frac{2n+1}{n(n+1)} (a_n \pi_n + b_n \tau_n),$ а

$$S_2 = \sum_n \frac{2n+1}{n(n+1)} (a_n \tau_n + b_n \pi_n).$$

Для визначення $\omega(a)$ достатньо моделювати зміну інтенсивності залежно лише від одного кута – θ . Другий координатний кут φ для спрощення виберемо таким, що дорівнює нулеві. Одержимо у такий спосіб вираз для ядра K рівняння (1):

$$K(\theta, a) = \frac{k^2 \cdot E_0^2}{\omega^2 \cdot \mu^2 \cdot \rho^2} \left[|S_2|^2 \right] \quad (9)$$

На цьому етапі досліджень ми володіємо лише неповною інформацією про $\omega(a)$. Відомо, що $\omega(a)$, визначена на проміжку від 0 до ∞ , має скінченну кількість екстремумів; її значення не менші від нуля; вона обмежена згори деякою константою C та задо-

вольняє умові нормування: $\int_0^{\infty} \omega(x) dx = 1$. Для

моделювання скористаємося відомими розподілами, що мають вищеперелічені властивості. Такими розподілами, є, наприклад: розподіли Накагамі, Релея, χ^2 тощо. У цій статті розглянуто розподіли Накагамі та χ^2 .

Моделювання. Праву частину рівняння (1) отримують, вимірюючи індикатрису розсіяного частинками світла. На етапі математичного моделювання можна лише розрахувати індикатрису розсіяного світла.

Для обчислення $I_S(\theta)$ перейдемо до дискретного аналогу рівняння (1), використавши одну з квад-

ратурних формул. Для спрощення виберемо формулу прямокутників. Зазначимо, що вибір квадратурної формули не порушує загальності, оскільки під час моделювання похибка від апроксимації рівняння (1) будь-якими квадратурними формулами дорівнює нулю.

Після розрахунку $I_S(\theta)$ введемо певне збурення.

Отриману залежність позначимо $\tilde{I}_S(\theta)$.

Існує кілька можливостей збурення $I_S(\theta)$:

а) Додавати до кожного значення $I_S(\theta)$ випадкову величину, розподілену за певним законом, що

змінюється в межах $\tilde{I}_S(\theta_i) = I_S(\theta) \pm \delta \cdot \max(I_S(\theta))$

$$\tilde{I}_S(\theta_i) = I_S(\theta) \pm \delta \cdot \max(I_S(\theta));$$

б) Додавати до кожного значення $I_S(\theta)$ випадкову величину, розподілену за певним законом, що змінюється в межах

$$\tilde{I}_S(\theta_i) = I_S(\theta_i) \pm \delta \cdot I_S(\theta_i),$$

де δ – значення відносної похибки, $\max(I_S(\theta))$ – найбільше значення інтенсивності розсіяного світла, $I_S(\theta_i)$ – i -те значення I_S

На нашу думку, фізично найправдоподібнішим є варіант б.

Далі будемо розв'язувати рівняння (1), використовуючи $\tilde{I}_S(\theta)$. Випадкову величину δ будемо вважати розподіленою за рівномірним законом межах $\pm 3\%$.

Хоча й відомо, що рівняння (1) є некоректною задачею [4], спробуємо розв'язати його, звівши до системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Залежність похибки визначення $\omega(a)$ від розмірів частинок показані на рис. 2. Як видно з рис 1, найбільші значення похибки визначення $\omega(a)$ виникають, якщо значення цієї функції є малими, а саме для розподілу Накагамі за розмірів частинок 1..3 мкм $\omega(a) < 0.06$, а в межах 15..20 мкм $\omega(a) < 0.07$, для розподілу χ^2 в межах 15..20 мкм $\omega(a) < 0.008$. Спроба статистичного усереднення одержаних результатів привела до результатів, що зображені на рис. 2 та в табл. 1 та 2. Як видно з рис 3 та табл. 1 та 2, за певної кількості вимірювань можна досягти прийнятної точності, для таких a , для яких значення $\omega(a)$ має практичний інтерес.

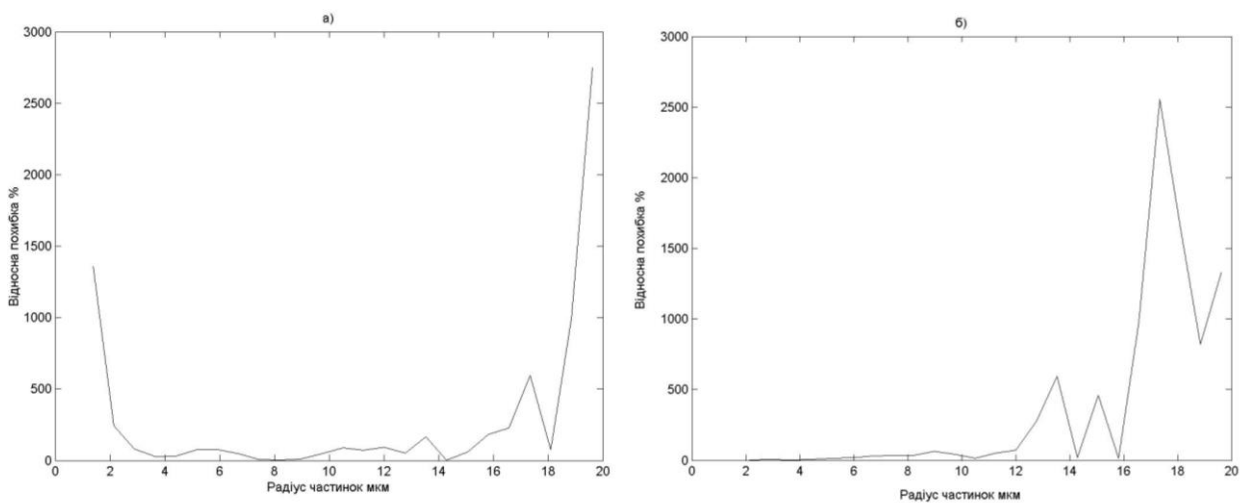


Рис. 1. Залежність похибки визначення $\omega(a)$ від розмірів частинок: а – подання $\omega(a)$ розподілом Накагамі; б – подання $\omega(a)$ розподілом χ^2

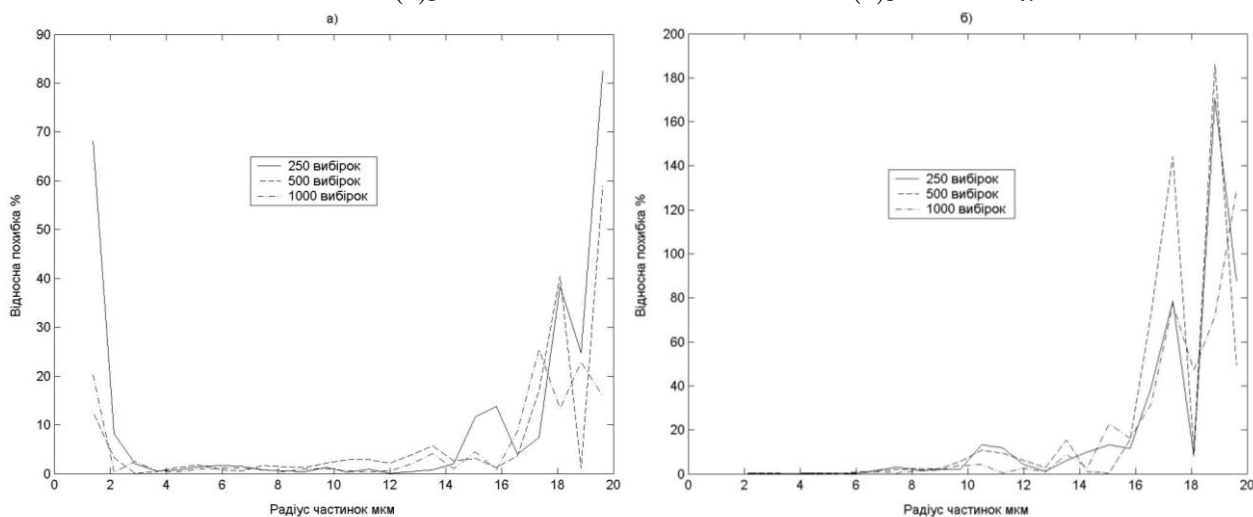


Рис. 2. Залежність похибки визначення $\omega(a)$ від розмірів частинок у разі статистичної обробки (усереднення) одержаних результатів. Залежність $\omega(a)$ апроксимовано так: а – розподіл Накагамі; б – розподіл χ^2

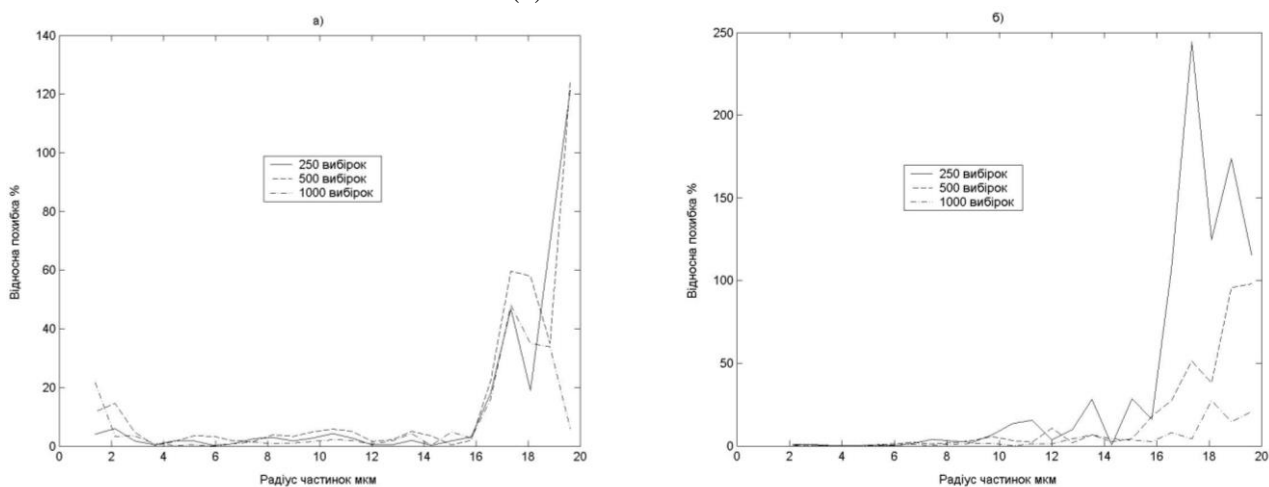


Рис. 3. Залежність похибки визначення $\omega(a)$ від розмірів частинок у разі статистичного усереднення вимірених значень інтенсивності розсіяного світла. Залежність $\omega(a)$ апроксимовано так: а – розподіл Накагамі; б – розподіл χ^2

Таблиця 1

**Похибки визначення $\omega(a)$
при моделюванні $\omega(a)$ розподілом Накагамі**

Проміжок значень а, мкм	Середнє значення відносної похибки, %		
	250 вибірок	500 вибірок	1000 вибірок
1 – 20	10.97	6.92	5.23
2 – 15	2.59	2.07	1.28
2 – 11	1.59	1.58	0.87
2 – 8	1.95	1.26	0.94

Таблиця 2

**Похибки визначення $\omega(a)$
при моделюванні $\omega(a)$ розподілом χ^2**

Проміжок значень а, мкм	Середнє значення відносної похибки, %		
	250 вибірок	500 вибірок	1000 вибірок
2 – 20	19.49	22.49	17.71
2 – 15	4.39	4.04	3.63
2 – 11	2.85	2.72	1.17
2 – 8	0.86	0.80	0.52

Приблизно такі самі результати отримано внаслідок обробки початкової інформації – інтенсивності світла, розсіяного частинками. Це можна пояснити тим, що рівняння (1) лінійне. Результати такої обробки подано на рис. 3.

Висновки. Виконане моделювання цілком підтверджує адекватність вибраного методу розв'язання інтегрального рівняння, що вимагає накопичення результатів великої кількості незалежних вимірювань за значних витрат часу. Інші підходи до розв'язання

цього рівняння будуть розглянуті у наступних роботах.

1. <http://www.uni-weimar.de/Bauing/aufber/Literatur/Stark-Mueller-Durban03.pdf>. 2. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. – М., 1986. 3. Michael I. Mishchenko Larry D. Travis Andrew A. Lacis "Scattering, Absorption, and emission of Light by Small Particles Revised electronic edition // Goddard Institute for Space Studie. – New York, 2004. 4. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. – М., 1990.