вплив випадкового характеру тривалості технологічних операцій

$$Q_{ф} = p\, K_{в}\, \eta\, \rho_{n} / t_{n}, \qquad (11)$$

де $Q_ф$ – фактична продуктивність верстатної лінії; p – кількість об'єктів оброблення, що випускається за один цикл; η – коефіцієнт придатності продукції; ρ_n – коефіцієнт використання робочого часу останнього верстата у лінії; t_n – середнє значення тривалості циклу останнього верстата(за умови, що він працює не у структурі лінії).

Для вибору оптимальних (раціональних) варіантів верстатних ліній пропонується критерій мінімум питомих інвестицій

$$k = I / (N\, П_р), \qquad (12)$$

де k – питомі інвестиції; I – інвестиції, необхідні для реалізації даного варіанта лінії; N – термін експлуатації у роках; $П_р$ – річна фактична продуктивність.

Неодхідні для реалізації певного варіанта інвестиції, згідно із запропонованим алгоритмом, можна розписати як витрати для першого (першого умовного) верстата – B_1, другого верстата – B_2 і витрат на реалізацію накопичувача місткістю M – $B_н$ M. Тоді попередній вираз запишеться

$$k = (B_1 + B_2 + B_н\, M) / (N\, П_р), \qquad (13)$$

де $B_н$ – витрати для реалізації накопичувача місткістю M=1.

Для визначення фактичної продуктивності $П_ф$ використовуємо вираз (2). Тому продиференціювавши останній вираз $\partial k / \partial M$, прирівнявши його до нуля та провівши необхідні перетворення, отримуємо залежність для обчислення оптимальних значень місткостей накопичувачів між верстатами.

1. Дащенко А.И.,Белоусов А.П. Проектирование автоматических линий. М., 1984. 2. Елементи теорії автоматичних ліній / Д.Л.Дудюк, Л.Д.Загвойська, В.М.Максимів та ін.; Під ред. Д.Л.Дудюка. К., 1998. 3. Дудюк Д.Л., Максимів В.М., Сорока Л.Я. Моделювання і оптимізація технологічних потоків лісопереробки. К., 1995. 4. Автоматизация процессов машиностроения / Я.Буда, В.Гановски, В.Вихман и др.; Под ред. А.И.Дащенко. М., 1991.

УДК 515.2

ГЕОМЕТРИЧНІ МОДЕЛІ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ У ДОСЛІДЖЕННІ РЕГУЛЬОВАНИХ СИСТЕМ

© Мартин Є.В., 1999

ДУ «Львівська політехніка», кафедра «Нарисна геометрія та графіка»

Розроблені та обгрунтовані геометричні засоби фазового простору функції комплексних змінних як основи формування областей стійкості параметрів регульованих систем. Запропоновані геометричні моделі *n*-вимірного комплексного простору для формування многовидів, що являють графіки функцій комплексних змінних.

Підвищення якості проектування регульованих електромеханічних систем передбачає, зокрема, використання ефективних засобів дослідження їх стійкості із застосуванням комп'ютерних засобів. Відомі способи уможливлюють дослідити вплив не більше двох параметрів на стійкість електромеханічних систем [1].

У двовимірному просторі, розмірність якого визначена кількістю змінних параметрів, області стійкості відповідають однаковій кількості коренів з від'ємною дійсною частиною характеристичного рівняння

$$a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n = 0 \qquad (1)$$

електромеханічної системи, поведінку якої описують n диференціальних рівнянь ($p=d/dt$).

Параметри системи – постійні часу та коефіцієнти підсилення входять до складу коефіцієнтів a_j характеристичного рівняння. Його комплексні корені дозволяють сформувати функцію комплексної змінної (ФКЗ), складові якої становлять вказані параметри. Розглянемо особливості її графічного зображення.

Геометричну модель функціональної залежності змінних величин становить многовид n-вимірного простору із вимірами цих величин [2]. Для двох дійсних змінних величин таким многовидом є графік, а фазовий простір двовимірний і становить площину. Кожна точка графіка встановлює залежність між відповідними точками області зміни аргументу і області значень функції. У дослідженні фізичних явищ і процесів для характеристики змінних величин, крім дійсних, використовують числа розширеної множини, наприклад звичайні комплексні числа вигляду $z=x+yi$, де x,y – будь-які дійсні числа, $i^2=-1$ – уявна одиниця. Такі числа входять до складу функціональної залежності між двома величинами і формують ФКЗ. Значення як аргументу, так і функції є комплексними числами, причому

$$\omega = u + \nu i = \omega(z) = \omega(x + yi) = u(x, y) + i\nu(x, y). \qquad (2)$$

Кожній точці A з координатами $a,в$ області G визначення z функції ω поставлена у відповідність точка B із координатами c,d області значень C цієї функції. При значенні уявної частини $y=0$ областю визначення слугує вісь x , а областю значень – вісь u функції дійсної змінної $u=u(x)$. Якщо для функції дійсної змінної співвідношення між значеннями аргументу і функції задане її графіком, то для ФКЗ окремо будують множину значень її аргументу у площині z і відповідну їй згідно з аналітичним виразом $\omega = \omega(z)$ множину значень функції у площині ω [3].

Очевидно, графік ФКЗ отримаємо у вигляді сукупності точок фазового простору із вимірами складових x та yi аргументу z і νi та u функції ω. Такий простір є чотиривимірним комплексним, а його осі становлять $x,yi,u,\nu i$ [4].

Для побудови геометричних моделей елементів простору використаємо зображення комплексного числа в ортогональній системі координат. Розмістивши осі складових аргументу z і функції ω ортогонально, отримаємо геометричну модель комплексного простору. Положення точки A ФКЗ визначене одразу чотирма її координатами $x,yi,u,\nu i$. Область визначення аргументу z задана множиною точок у розширеній комплексній площині z. Між складовими x та yi аргументу існує аналітична залежність $y = y(x)$, яка моделюється графіком у площині $oxyi$ комплексного простору. Отже, визначальною координатою аргументу z ФКЗ слугує дійсна частина x

комплексного числа, яка є, в свою чергу, теж аргументом. Визначивши складові функції ω, отримаємо чотиривимірний паралелотоп, вершинами якого є проекції точки A на тривимірні підпростори $A_{xuv}, A_{xuy}, A_{yuv}, A_{xyv}$ двовимірні підпростори $A_{xy}, A_{xv}, A_{xu}, A_{yv}, A_{yu}, A_{uv}$ і осі A_x, A_y, A_u, A_v. Положення точки однозначно визначимо за значеннями чотирьох її координат.

Особливі положення точки у комплексному просторі залежать від аналітичного виразу ФКЗ. Нульові значення уявної частини y аргументу z, перетворюють її у функцію дійсної змінної $u = u\ (x)$, а відповідне положення точки визначене координатами A_x, A_u площини oxu. Якщо дійсна частина x аргументу z відсутня і маємо тільки множину точок уявної осі yi, то положення точки визначене аналітичним виразом ФКЗ [5]. Так, для степеневої функції $\omega = z^n$, де $n = 2,3,4,\ldots$ при $x=0$ маємо: $\omega = u+v\ i = (yi)^n$.

Для парних значень n аналітичний вираз функції набирає вигляду:

$$u = -y^n \text{ при } n = 2,6,10,\ldots$$
$$u = y^n \text{ при } n = 4,8,12,\ldots$$

Точки знаходяться в координатній площині $ouyi$ комплексного простору. Для непарних значень n аналітичний вираз функції набирає вигляду:

$$v = y^n \text{ при } n = 5,9,13,\ldots$$
$$v = -y^n \text{ при } n = 7,11,15,\ldots$$

Точки знаходяться в координатній площині $ovlyi$ комплексного простору.

Побудуємо епюр точки комплексного простору. Визначимо навколо якої осі треба здійснювати оберт координатних площин паралелотопа. Значення ФКЗ задане відповідним значенням аргументу. Аргумент також є комплексним числом, між складовими якого існує аналітична залежність. Отже, дійсна частина аргументу формує решту складових функції. Отже, оберт координатних площин здійснюємо навколо дійсної осі x аргументу. Через те, що функція дійсної змінної $u = u\ (x)$ є частковим випадком ФКЗ, координатну площину oxu зручно сумістити з площиною креслення (див. рисунок). Площини $oxyi$ та $oxvi$ повернемо до суміщення з площиною oxu . Отримаємо епюр чотиривимірного комплексного простору. Його різновид являє епюр з рознесеними площинами проекцій (рисунок б), з відсутньою уявною складовою аргументу (див. рисунок в), з віссю обертання iy (див. рисунок г) та суміщений епюр (див. рисунок д). Відобразимо в ньому проекції точки A як складової графіка ФКЗ. Три проекції точки A_{xy}, A_{xu}, A_{xv} однозначно визначають її положення відносно площин проекцій комплексного простору.

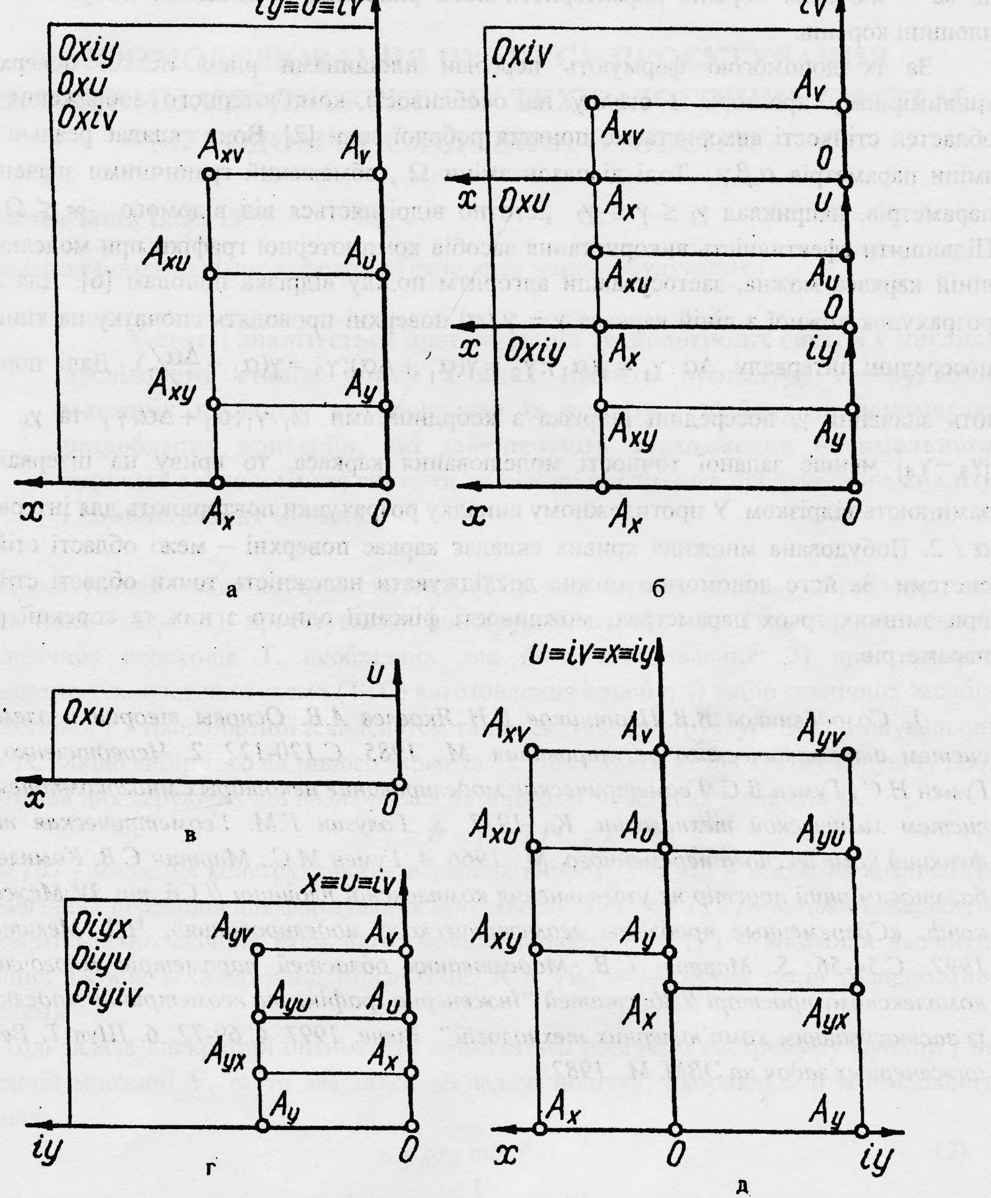
Параметричні рівняння отримаємо на основі (1), враховуючи, що

$$\omega = u(x, y) + iv(x, y) = 0,$$

звідки отримаємо

$$u=u(x,y)=0;$$
$$v=v(x,y)=0. \tag{3}$$

На основі залежностей (3) можна формувати межі області стійкості проекціями поверхні, зокрема для трьох змінних параметрів, використовуючи засоби комп'ютерної графіки. Тоді області стійкості при зміні одного чи двох параметрів регульованої системи являють частковий випадок.



Епюри для відображення многовидів як графіків ФКЗ.

Нехай три змінні параметри α, β, γ входять до складу характеристичного рівняння лінійно. Тоді параметричні рівняння межі області стійкості мають вигляд:

$$\gamma = \gamma\,(\,\Omega, \beta\,);$$
$$\alpha = \alpha\,(\,\Omega, \beta\,), \qquad (4)$$

де Ω – значення коренів характеристичного рівняння, розміщених на уявній осі в площині коренів.

За їх допомогою формують перерізи площинами рівня деякої поверхні у тривимірному просторі. З огляду на особливості комп'ютерного зображення меж областей стійкості використаємо поняття робочої зони [2]. Вона складає реальні межі зміни параметрів α,β,γ . Тоді діапазон зміни Ω , обмежений граничними значеннями параметрів, наприклад $\gamma_1 \le \gamma \le \gamma_2$,істотно відрізняється від відомого $-\infty \le \Omega \le \infty$. Підвищити ефективність використання засобів комп'ютерної графіки при моделюванні ліній каркаса можна, застосувавши алгоритм поділу відрізка пополам [6]. Для цього розрахунок кожної з ліній каркаса $\gamma = \gamma(\alpha)$ поверхні проводять спочатку на кінцях та посередині інтервалу $\Delta\alpha : \gamma_1 = \gamma(\alpha_1); \gamma_2 = \gamma(\alpha_1 + \Delta\alpha); \gamma_3 = \gamma(\alpha_1 + \Delta\alpha/2)$. Далі порівнюють значення γ_4 посередині відрізка з координатами $\alpha_1, \gamma_1; \alpha_1 + \Delta\alpha, \gamma_2$ та γ_3. Якщо $|\gamma_3 - \gamma_4|$ менше заданої точності моделювання каркаса, то криву на інтервалі $\Delta\alpha$ замінюють відрізком. У протилежному випадку розрахунки повторюють для інтервалу $\Delta\alpha / 2$. Побудована множина кривих складає каркас поверхні – межі області стійкості системи. За його допомогою можна досліджувати належність точки області стійкості при змінних трьох параметрах, можливості фіксації одного з них та корекції решти параметрів.

1. Солодовников В.В.,Плотников В.Н.,Яковлев А.В. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования. М., 1985. С.120-122. 2. Чередниченко Л.С., Гумен Н.С., Гумен В.С. Геометрическое моделирование некоторых многокомпонентных систем химической технологии. К., 1977. 3. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М., 1966. 4. Гумен М.С., Мартин Є.В. Комплексний багатовимірний простір як узагальнення комплексної площини // Сб. тр. IV Междунар. конф. «Современные проблемы геометрического моделирования». Ч.2. Мелитополь, 1997. С.54-56. 5. Мартин Є.В. Моделювання областей параметрів многочленів у комплексному просторі // Зб. статей "Інженерна графіка та геометричне моделювання із застосуванням комп'ютерних технологій". Рівне, 1997. С.69-72. 6. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ. М., 1982.