

природність звучання сповільнено відтворених голосових повідомлень у випадках застосування функцій нормування оригінальної тривалості мовних елементів (особливо для протяжних звуків та початково довгих пауз). Розроблені криві корегування тривалості можна ефективно використовувати також у процесах прискороного відтворення мовних даних, оскільки вони підтримують лімітоване скорочення короткотривалих звуків.

1. Шпак З.Я. Модель сповільнення темпу подання мовної інформації. // "Комп'ютерна інженерія та інформаційні технології", Вісник ДУ"Львівська політехніка" №351. Львів, 1998. С. 98-106.
2. Рашкевич Ю.М. Перетворення часового масштабу мовних сигналів. Львів, 1997.
3. З.Шпак. Фіксоване часове масштабування фрагментів мовного потоку на основі адаптивного підходу. / Вісник Державного університету "Львівська політехніка": Комп'ютерна інженерія та інформаційні технології. Львів, 1999. №380. С. 101-109.

УДК 621.397.3

## ІНФОРМАЦІЙНА СИСТЕМА ПІДТРИМКИ КРЕДИТНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ: КРЕДИТИ ІЗ СЕКВЕНЦІЙНИМИ ВНЕСКАМИ

© Е. Марецька

Державний НДІ інформаційної інфраструктури  
Академія інформатики та управління

*Розроблено математичні моделі консолідації кредитів, які сплачують у секвенційних внесках. Моделі враховують різноманітні способи нарахування процентів: простий чи складний, постійну чи змінну процентні ставки. Створена інформаційна система дає можливість порівнювати кошти кредитів, знаходити оптимальні умови надання кредитів.*

*The mathematical models for consolidation of credits, which are repaid in sequential instalments, are carried out. The models allow various ways of charge of interests: simple or compound interest, fixed or floating interest rate. The created informational system enables to compare the costs of credits, and to find optimum conditions of granting the credits.*

Частими є випадки, коли один клієнт сплачує декілька кредитів одному кредиторі. Будь-яка затримка сплати клієнтом чергового внеску вимагає оперативного перегляду подальшого графіка сплати всіх кредитів [1,2]. При цьому як з боку клієнта, так і з боку кредитодавця може ініціюватися процедура консолідації (об'єднання) всіх

сплачуваних кредитів в один з дещо подовженим терміном сплати. В ході такої операції потрібно врахувати сплачені частини кредитів та визначити графік і розміри внесків для сплати консолідованого кредиту.

Пропоновані в цій статті засоби математичного моделювання складних процесів консолідації кредитів базуються на принципі еквівалентності капіталу. Цей принцип дає можливість порівнювати два чи більше капіталів, що відносяться до різних моментів часу, враховувати як минулий, так і прогнозований стани фінансового ринку, різноманітні способи нарахування процентів, індексації чи валоризації внесків.

Розглянемо задачу сплати  $M$  кредитів, причому сплата здійснюється у так званих секвенційних внесках (тобто спочатку у капіталових внесках – внесках, породжених капіталом, а потім – у відсоткових, або навпаки). Для кожного із кредитів заданими є такі параметри:  $t_{b_m}$  – час оформлення  $m$ -го кредиту,  $m = 1, \dots, M$ , де  $b_m$  є порядковим номером часової дискрети, що відповідає початковій дії  $m$ -го кредиту;  $t_0$  – початок дії кредиту, оформленого найшвидше;  $P_{mb_m}$  – квота  $m$ -го кредиту;  $N_m$  – число внесків  $m$ -го кредиту, причому перші  $L_m$  внесків є капіталовими, а наступні  $N_m - L_m$  внесків – відсотковими. Для консолідованого кредиту заданими є:  $t_k$  – момент часу, в який здійснюється консолідація;  $N$  – число внесків консолідованого кредиту (з них  $L$  капіталових внесків). Вважаємо, що відомими є також розміри процентних ставок, а також коефіцієнти індексації чи валоризації. Необхідно за різних умов нарахування процентів знайти розміри внесків всіх  $M$  кредитів, розміри всіх технічних кредитів в момент консолідації, розміри внесків консолідованого кредиту, а також шляхом математичного моделювання знайти умови надання кредиту, які забезпечують мінімальний кошт кредиту.

З метою визначення розмірів внесків перед консолідацією (як капіталових, так і відсоткових) допускаємо, що період дискретизації фінансового процесу є постійним (дискретні терміни сплати внесків збігаються). При цьому  $n$ -й термін сплати внеску належить до кінця  $n$ -го проміжку часу, причому, якщо  $t_n$  є терміном сплати внеску одного з кредитів, то він водночас є терміном сплати внесків всіх інших кредитів, які діють на цей час. Моделювання процесу консолідації  $M$  кредитів розглянемо у трьох фазах: визначення розмірів внесків всіх кредитів, розрахунок розмірів всіх технічних кредитів в момент консолідації, визначення розмірів внесків консолідованого кредиту.

Нехай  $K_{mn}$  –  $n$ -й капіталовий внесок  $m$ -го кредиту (внесок в момент  $t = t_n$ );  $C_m$  – коефіцієнт нарахування процентів  $m$ -го кредиту за  $i$ -й термін, причому залежить він виключно від макроекономічних показників (рівня інфляції) та часу, за який нараховуються проценти.

Капіталові внески задовольняють рівняння

$$\sum_{l=b_m+1}^{b_m+L_m} K_{ml} = P_{mb_m}. \quad (1)$$

Відомими є також вирази, які відображають індексацію чи валоризацію капіталових внесків кредиту

$$K_{mn} = K_{m,b_m+1} \left(1 + j_m^{[k]}\right)^{n-b_m-1}, \quad n = b_m + 2, \dots, b_m + L_m; m = 1, \dots, M; \quad (2)$$

$$K_{mn} = K_{m,b_m+1} + (n - b_m - 1)\Delta_m^{[k]}, \quad n = b_m + 2, \dots, b_m + L_m; m = 1, \dots, M, \quad (3)$$

де  $j_m^{[k]}$  – ставка індексації капіталових внесків  $m$ -го кредиту,  $\Delta_m^{[k]}$  – їх квота валоризації. У випадку індексації внески утворюють геометричну прогресію, а у випадку валоризації – арифметичну. Із системи рівнянь (1)-(3) на підставі відомих сум, відповідно, арифметичної чи геометричної прогресій знаходимо спочатку розміри перших внесків

$$K_{m,b_m+1} = P_{mb_m} j_m^{[k]} / (1 + j_m^{[k]})^{L_m-1}; \quad K_{m,b_m+1} = [P_{mb_m} - L_m(L_m - 1)\Delta_m^{[k]}/2] / L_m,$$

а потім і всієї решти внесків.

Відсоткові внески знаходимо на підставі рівняння еквівалентності капіталу у вигляді

$$P_{mb_m} C_{mb_m} = \sum_{n=b_m+1}^{b_m+L_m} K_{mn} C_{mn} + \sum_{n=b_m+L_m+1}^{b_m+N_m} I_{mn} C_{mn}, \quad m = 1, \dots, M, \quad (4)$$

де  $I_{mn}$  – відповідний відсотковий внесок. Існують аналогічні вирази для індексації чи валоризації відсоткових внесків

$$I_{mn} = I_{m,b_m+L_m+1} (1 + j_m^{[l]})^{n-b_m-L_m-1}, \quad n = b_m + L_m + 2, \dots, b_m + N_m; \quad (5)$$

$$I_{mn} = I_{m,b_m+L_m+1} + (n - b_m - L_m - 1)\Delta_m^{[l]}, \quad n = b_m + L_m + 2, \dots, b_m + N_m; \quad (6)$$

причому  $j_m^{[l]}$  – ставка індексації відсоткових внесків  $m$ -го кредиту,  $\Delta_m^{[l]}$  – їх квота валоризації. Рівняння (4) та вирази (5) і (6) дають змогу знайти розміри всіх відсоткових внесків. Величини коефіцієнтів нарахування процентів  $C_{mn}$  вважаємо при цьому відомими, формули для їх знаходження залежать від способу нарахування процентів.

В термін  $t = t_k$  здійснюється консолідація всіх кредитів в один. Цей термін повинен задовольняти умову

$$\max_{m=1, \dots, M} (t_{b_m}) < t_k < \min_{m=1, \dots, M} (t_{b_m+L_m}),$$

в цей термін не сплачуються поточні внески.

Розглядатимемо однорідну модель консолідації кредиту, в якій тип внесків та способи нарахування процентів не змінюються після консолідації. На практиці зазвичай термін завершення сплати об'єднаного кредиту є, як правило, пізнішим від терміну завершення сплати найпізнішого неконсолідованого кредиту.

У процесі консолідації кредитів в першу чергу виконують конверсію кожного з кредитів на спільний термін  $t = t_k$ . Така конверсія полягає у визначенні відповідно до цього терміну квот  $P_{mk}$  одноразової сплати ще не сплачених внесків всіх кредитів. Ці квоти  $P_{mk}$  називають технічними кредитами (тобто, для  $m$ -го кредиту стосовно терміну  $t = t_k$ ).

Розміри технічних кредитів визначаємо дисконтуванням всіх не сплачених внесків на спільний для всіх кредитів термін консолідації

$$P_{mk} = K_{mk} + \sum_{n=k+1}^{b_m+L_m} K_{mn} / D_{mn} + \sum_{n=b_m+L_m+1}^{b_m+N_m} I_{mn} / D_{mn}, m = 1, \dots, M, \quad (7)$$

де  $D_{mn}$  – коефіцієнти дисконтування  $m$ -го кредиту за  $n$ -й термін. Значення цих коефіцієнтів залежать від рівня інфляції та часу дисконтування, і їх вважаємо відомими. В результаті конверсії всіх кредитів до сплати в термін  $t = t_k$  залишаються  $M$  технічних кредитів  $P_{mk}$ , які можна замінити одним консолідованим кредитом  $P_k = \sum_{m=1}^M P_{mk}$ . Цей кредит може бути наданий на інших умовах (інші розміри процентних ставок; термін сплати до  $t = t_{k+N}$ ).

Розміри капіталових внесків  $K_n$ ,  $n = 1, \dots, N$  консолідованого кредиту  $P_k$  задовольняють умову

$$\sum_{n=k+1}^{k+L} K_n = P_k, \quad (8)$$

причому є відповідні вирази, які відображають індексацію чи валоризацію капіталових внесків об'єднаного кредиту

$$K_n = K_{k+1} (1 + j^{[k]})^{n-k-1}, \quad n = k+2, \dots, k+L; \quad (9)$$

$$K_n = K_{k+1} + (n-k-1)\Delta, \quad n = k+2, \dots, k+L; \quad (10)$$

де  $j^{[k]}$  – ставка індексації,  $\Delta^{[k]}$  – квота валоризації.

Рівняння (8) та вирази (9) і (10) дають можливість визначити розміри всіх капіталових внесків консолідованого кредиту. Відсоткові внески визначаємо на основі принципу еквівалентності капіталу, який у цьому випадку записуємо у вигляді

$$P_k C_k = \sum_{n=k+1}^{k+L} K_n C_n + \sum_{n=k+L+1}^{k+N} I_n C_n, \quad (11)$$

де  $C_n$ ,  $n = k, \dots, k+N$  – віднесені до консолідованого кредиту коефіцієнти нарахування процентів за  $n$ -й термін, які залежать від рівня інфляції та часу, за який здійснюється нарахування процентів. Величини коефіцієнтів нарахування процентів  $C_n$  вважаємо при цьому відомими, формули для їх знаходження залежать від способу нарахування процентів.

Записуємо також вирази, які відображають індексацію чи валоризацію відсоткових внесків консолідованого кредиту

$$I_n = I_{k+1} (1 + j^{[l]})^{n-k-1}, \quad n = k+2, \dots, k+N; \quad (12)$$

$$I_n = I_{k+1} + (n-k-1)\Delta^{[l]}, \quad n = k+2, \dots, k+N, \quad (13)$$

де  $j^{[l]}$  – ставка індексації відсоткових внесків,  $\Delta^{[l]}$  – їх квота валоризації.

З врахуванням виразів (12) чи (13) рівняння (11) розв'язують відносно розміру першого відсоткового внеску  $I_{k+1}$ , а потім знаходять розміри всіх інших відсоткових внесків  $I_n$ ,  $n = k + 2, \dots, k + N$ . Рівняння (11), яке відображає принцип еквівалентності капіталу, записане для вузла дискретизації, що відповідає останньому внескові сплати консолідованого кредиту, при цьому звичайно  $C_{k+N} = 1$ .

Кошт короткотермінових кредитів без консолідації визначаємо як суму відсоткових внесків, тобто

$$Q = \sum_{m=1}^M \sum_{n=b_m+1}^{b_m+L_m} I_n.$$

Загальний кошт кредиту консолідованого становлять його відсоткові внески  $Q_2 = \sum_{n=k+1}^{k+N} I_n$  оскільки до терміну  $t = t_k$  такі внески не сплачувалися.

Описаний вище підхід до побудови математичних моделей процесів консолідації кредитів дає можливість враховувати різноманітні способи нарахування процентів, а також постійну чи змінну процентні ставки. Розглянемо як приклад випадок простого нарахування процентів із змінною ставкою.

У цьому випадку розміри процентних ставок є різними для всіх термінів сплати внесків. Позначимо через  $s_{mn}$  процентну ставку для  $m$ -го кредиту за  $n$ -й термін ( $s_{mn} \neq \text{const}, \forall n = b_m, \dots, b_m + N_m, m = 1, \dots, M$ ). При цьому коефіцієнти нарахування процентів  $C_{mn}$  знаходимо за допомогою формули

$$C_{mn} = \begin{cases} 1, & n = b_m + N_m; \\ 1 + \sum_{i=n}^{b_m+N_m-1} s_{m,i+1}, & n < b_m + N_m. \end{cases}$$

Капіталові внески задовольняють рівняння (1)-(3). Рівняння еквівалентності капіталу для кожного з кредитів перед консолідацією, віднесене до кінця терміну сплати цього кредиту, можна записати у вигляді

$$P_{mb_m} \left( 1 + \sum_{n=b_m}^{b_m+N_m} s_{mn} \right) = \sum_{n=b_m+1}^{b_m+L_m} K_{mn} \left( 1 + \sum_{i=n+1}^{b_m+N_m} s_{mi} \right) + \sum_{n=L_m+1}^{b_m+N_m-1} I_{mn} \left( 1 + \sum_{i=n+1}^{b_m+N_m} s_{mi} \right) + I_{mN_m}, m = 1, \dots, M$$

На основі останньої системи рівнянь з врахуванням відповідних виразів для індексації чи валоризації внесків отримуємо розміри відсоткових внесків  $I_{mn}$  неконсолідованих кредитів. Величини технічних кредитів на момент  $t = t_k$  визначаємо дисконтуванням всіх несплачених внесків

$$P_{mk} = K_{mk} + \sum_{n=k+1}^{b_m+L_m} \frac{K_{mn}}{1 + \sum_{i=k+1}^n s_{mi}} + \sum_{n=b_m+L_m+1}^{b_m+N_m} \frac{I_{mn}}{1 + \sum_{i=k+1}^n s_{mi}}, m = 1, \dots, M,$$

Вирази у знаменниках є коефіцієнтами дисконтування  $D_{mn}$   $m$ -го кредиту за  $n$ -й термін, для якого справджується рекурентне співвідношення  $D_{mk} = 1, D_{mn} = D_{m,n-1} + s_{mn}$ ,

$\forall n = k + 1, k + 2, \dots, k + N_m$ .

Розміри капіталових внесків  $K_n, n = 1, \dots, N$  консолідованого кредиту знаходимо за допомогою рівняння (8), а також виразів (9) і (10).

Натомість, розміри відсоткових внесків шукаємо на основі рівняння еквівалентності капіталу для консолідованого кредиту, яке з врахуванням сумарного технічного кредиту  $P_k = \sum_{m=1}^M P_{mk}$  записуємо у вигляді

$$P_k \left( 1 + \sum_{n=k+1}^{k+N} s_n \right) = \sum_{n=k+1}^{k+L} K_n \left( 1 + \sum_{i=n+1}^{k+N} s_i \right) + \sum_{n=k+L+1}^{k+N-1} I_n \left( 1 + \sum_{i=n+1}^{k+N} s_i \right) + I_{k+N},$$

де  $s_n$  – процентна ставка для консолідованого кредиту за  $n$ -й термін, причому  $s_n \neq \text{const}, \forall n = k + 1, \dots, k + N$ . Останнє рівняння з врахування відповідних виразів для індексації (12) чи валоризації (13) внесків консолідованого кредиту дає можливість визначити розміри всіх відсоткових внесків  $I_n$  цього кредиту.

Аналогічним чином можна розглянути випадки консолідації кредитів для складного нарахування процентів (з постійною чи змінною процентною ставкою).

Розроблені математичні моделі консолідації кредитів, сплачуваних у секвенційних внесках, описують фінансові процеси об'єднання кількох кредитів в один і дають можливість знаходити розміри внесків цього нового кредиту. Такі моделі враховують різноманітні способи нарахування процентів (простий чи складний), а також просту чи змінну процентні ставки. Створений математичний апарат та відповідна інформаційна система дають можливість порівнювати кошти кредитів перед консолідацією та після неї, знаходити умови надання кредитів, які забезпечують їх мінімальний кошт з боку клієнта.

1. Марецка Е. Математическое моделирование кредитов // Моделирование та інформаційні технології. 1999. Вип. 4. С. 148-154.
2. Marecka E. Modele informatyczne konsolidacji kredytow. Bielsko-Biala: WSiIZ, 2000.