УДК 519.6:681.142.1

СТІЙКІСТЬ ІМПУЛЬСНИХ ПРОЦЕСІВ НА ЗВАЖЕНИХ ОРГРАФАХ

© Л. Плахта, Н. Притула, М. Притула
НУ центр математичного моделювання ІППММ НАНУ ім. Я.С.Підстригача

Розглядаються імпульсні процеси на зважених орграфах. Наведені дослідження залежності стійкості імпульсного процесу від зміни ваг дуг орграфа.

Impulsive processes on the weighted directed graphs are considered. The investigation of dependence of the impulsive process stability on the change of weightes of directed graph arces is given.

Вступ

Багато важливих досліджуваних проблем пов'язані із надзвичайно складними системами. Такі системи містять велику кількість змінних, які взаємодіють між собою; одним із підходів до моделювання таких систем є зваженні орграфи і імульсні процеси на них.

Використання знакових і зважених орграфів для моделювання складних систем

Найбільш суттєві для досліджуваної проблеми змінні параметри вважаються вершинами орграфа. Від вершини u' до вершини v' в G є дуга, якщо зміна значення параметра u' впливає безпосередньо на значення v'. Ця дуга має знак плюс, якщо вплив u' на v' є "посиленням" (за інших рівних умов збільшеня u' приводить до збільшення v' і зменшення u' приводить до зменшення v'), і знак мінус, якщо викликає "гальмування" (за інших рівних умов збільшення u' приводить до зменшення v' і зменшення u' приводить до збільшення v').

Згідно з твердженням Маруями [1], контур (дві і більше змінних) посилює відхилення тоді і лише тоді, коли він містить парну кількість негативних дуг[1] (в супротивному випадку це контур, який протидіє відхиленню).

Якщо більшість контурів є контурами, які посилюють відхилення, то початкові зміни можуть бути перевищеними змінами в результаті їх безпосереднього впливу. Отже, наявність багатьох контурів, які посилюють відхилення, передбачають нестійкість.

Такі моделі містять в собі багато спрощень. Наприклад, вплив деяких змінних на інші може бути різної сили. Модель у вигляді знакового орграфа передбачає всі впливи однаковими за силою, оскільки ваги на кожній дузі дорівнюють одиничній величині. Більш обгрунтовано буде приписування дугам (u', v') різні ваги $w(u', v')$, що приводить до зваженого орграфа. Така вага інтерпретується як відносна сила впливу і може бути позитивною (для "підсилюючих" впливів) чи негативною (для "гальмуючих" впливів). Ще реалістичнішим буде вважати, що сила впливу, відповідаюча дузі (u', v'), змінюється залежно від значень змінних u' і v'. Таку залежність можна змоделювати, приписуючи кожній дузі (u', v') орграфа G функцію $f_{uv}(u', v')$ значень u' і v' змінних u' і v', де $f_{uv}(u', v')$ інтерпретується як сила впливу u' на v', якщо u' набуває значення u', а v' – значення рівня v'. Орграф з такою функцією f_{uv} називається функціональним знаковим орграфом.

У функціональному знаковому орграфі для простоти можна вважати, що f_{uv} є функцією свого першого аргумента. Ця функція може зростати для невеликих значень u' і спадати при великих значеннях u' чи мати більш складні властивості.

Друге спрощення в знаковій (зваженій чи функціонально-знаковій) моделі полягає в тому, що не враховується час запізнювання при впливі зміни в u' на v'. Отже, в більш точній моделі необхідно було б ввести на дузі другу вагу, для визначення запізнювання, відповідного впливу, чи ще в більш загальному вигляді функцію $g_{uv}(u', v')$, яка визначає запізнювання при впливі u на v, якщо u набуває u', а v - значення v'.

Нижче ми введемо спеціальне правило зміни значень імпульсного процесу, яке встановлює, як відхилення значень змінних поширюються за деякий час по системі. Тепер ми можемо сформулювати проблему прогнозування так: передбачити значення $v_i(t)$ вершини u_i в момент часу t чи, інакше кажучи, передбачити зміну в $v_i(t)$ при заданому його початковому значенні v_i(поч).

Стратегією називається процедура, яка змінює стан системи. Якщо система представляється зваженим орграфом, деякі можливі зміни, чи стратегії, є такими:

1. Змінити у визначений час значення деяких вершин.
2. Додати в заданий час деяку нову вершину (фактор) і нові дуги до неї і від неї.
3. Змінити в певний час знак деякої дуги.
4. Змінити в заданий час вагу деякої дуги.
5. Додати нову дугу між наявними вершинами.
6. Додати новий контур (який посилював би чи зменшував відхилення).

Імпульсні процеси

Щоб визначити правило зміни значень параметрів вершин, розглянемо спочатку знаковий орграф. Зазвичай, його вершини представлені сукупністю u'_1, u'_2, …, u'_n. Припускається, що кожна вершина u'_i набуває значення $v_i(t)$ в дискретні моменти часу $t = 1, 2, \ldots$. Спочатку будемо вважати, що значення $v_i(t + 1)$ визначається значенням $v_i(t)$ і інформацією про те, збільшили чи зменшили свої значення інші вершини u_j, суміжні з u_i, в момент часу t.

Якщо дуга з u_j в u_i є позитивною (негативною), то зміна в u_j в момент t враховується із знаком плюс (мінус) в u_i в момент $t + 1$. Ми будемо вважати, що одинична зміна в u_j спричиняє одиничну зміну в u_i. Зміна $p_j(t)$, яка називається імпульсом, задається різницею $v_j(t) - v_j(t-1)$ при $t > 1$. Необхідно вказати і початкову умову при $t = 0$. Підводячи висновки, введемо такі позначення:

$$\operatorname{sgn}(u_j,u_i) = \begin{cases} 1, \text{якщо} \quad \text{дуга } (u_j,u_i) \text{ позитивна}, \\ -1, \text{якщо} \quad \text{дуга } (u_j,u_i) \text{ негативна}, \\ 0, \text{якщо дуга } (u_j,u_i) \text{ відсутня}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Тоді для $t \geq 0$ визначимо

$$v_i(t+1) = v_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \mathrm{sgn}(u_j, u_i) p_j(t). \qquad (2.2)$$

У більш загальній ситуації імпульсний процес може зазнавати впливу зовнішніх імпульсів у будь-який момент часу. В цьому випадку припускаємо,що $p_j^0(t)$ представляє зовнішній імпульс чи зміну у вершині u_j в момент t. Величина $p_j^0(t)$ повинна додаватись до значення вершини u_j в момент t. Отже, ми отримуємо більш загальну формулу для імпульсного процесу

$$v_i(t+1) = v_i(t) + p_j^0(t+1) + \sum_{j=1}^{n} \mathrm{sgn}(u_j, u_i) p_j(t). \qquad (2.3)$$

Умова (2.2) для автономного імпульсного процесу в знаковому орграфі звичайно узагальнюється у правило зміни значень для автономного імпульсного процесу у зваженому орграфі. Ми просто вважаємо

$$v_i(t+1) = v_i(t) + \sum_{j=1}^{n} w(u_j, u_i) p_j(t), \qquad (2.4)$$

де $w(u, v) = 0$, якщо дуга (u', v') є відсутньою. Тепер, якщо є дуга з u_j в u_i з вагою $w = w(u_j, u_i)$ і значення вершини u_j зростає в момент часу t на k одиниць, то в результаті значення вершини u_i в момент часу $t + 1$ зростає на kw одиниць.

Зазначимо, що автономний імпульсний процес в знаковому орграфі D проходить за правилом (2.4) з вектором початкових значень

$$V(0) = (v_1(0), v_2(0), \ldots, v_n(0)),$$

і вектором

$$P(0) = (p_1(0), p_2(0), \ldots, p_n(0)).$$

Автономний імпульсний процес, в якому вектор $P(0)$ має i компоненту, яка дорівнює 1, а вся решта компонентів дорівнює 0, називається простим імпульсним процесом.

Визначення стійкості. Виділимо два основні поняття. Перше належить до значень величин (параметрів) $v_j(t)$, які відповідають вершинам орграфа u_j. Це поняття абсолютної стійкості і воно вимагає, щоб значення $v_j(t)$ вершини u_j не було занадто великим за величиною (абсолютною величиною). Друге стосується величин імпульсів $p_j(t)$, прикладених до вершин u_j. Це поняття імпульсної стійкості, і згідно з ним зміна значення $v_j(t)$ вершин u_j, тобто імпульс $p_j(t)$, не повинен бути надто великим за абсолютною величиною.

Власні значення і стійкість

Перевірка стійкості орграфа D зводиться до дослідження простих питань про його власні значення. Наведемо декілька теорем з [1].

Теорема 1. Якщо зважений орграф D імпульсно стійкий для всіх простих імпульсних процесів, тоді кожне власне значення D за абсолютною величиною не перевищує одиницю.

Теорема 2. Нехай J – канонічна жорданова форма зваженого орграфа D. Тоді наступні твердження еквівалентні.

(a) D імпульсно стійкий для всіх автономних імпульсних процесів.

(b) D імпульсно стійкий для всіх простих імпульсних процесів.

(c) Кожне власне значення не перевищує одиницю, а кожне власне значення D, зв'язне в J за абсолютною величиною, менше за одиницю.

Теорема 3. Нехай D – зважений орграф. Наступні твердження еквівалентні.

(a) D абсолюно стійкий для всіх автономних імпульсих процесів.

(b) D абсолютно стійкий для всіх простих імпульсних процесів.

(c) D імпульсно стійкий для всіх простих імпульсних роцесів і одиниця не є власним значенням.

Основні результати

Лема1. Коефіцієнт при λ^{n-k} характеристичного рівняння $\det(A - I\lambda) = 0$ матриці $A(n\times n)$ є сумою добутків ваг k дуг підорграфів з k дугами, які розкладаються в множину попарно неперетинних контурів(простих орієнтованих циклів).

Доведення. Відомо, що $\det(A - I\lambda)$ дорівнює сумі добутків з відповідним знаком елементів матриці $A - I\lambda$ з кожного стовпця і з кожного рядка.

Розглянемо коефіцієнт при λ^{n-k}. Він знаходиться так: вибирається $n - k$ діагональних елементів матриці, викреслюються усі рядки і стовбці, які містять вибрані елементи, після чого отримається матриця $B(n\times n)$. З властивостей детермінанта маємо $\det(A - I\lambda) = p \pm \lambda^{n-k} \det(B)$, де p – деякий многочлен. Далі записуємо це у вигляді:

$\det(B) = \sum_{\sigma(\varepsilon)} b_{1i_1} b_{2i_2} \cdot \ldots \cdot b_{ki_k}$. Розглянемо добуток $b_{1i_1} b_{2i_2} \cdot \ldots \cdot b_{ki_k}$ і підограф H, породжений цими дугами. Відзначимо, що елементи $b_{1i_1}\, {}_{2i_2} \cdot \ldots \cdot b_{ki_k}$ матриці B беруться по одному з кожного рядка і з кожного стовпця. Отже кожна вершина підорграфа H має одну вхідну і одну вихідну дугу.

Легко показати, що підорграф H буде мати вигляд графа, що є диз'юктивним об'єднанням множини простих циклів.

Дійсно, припустимо, що деякий з циклів не простий, тоді існує така вершина, яка є інцидентна принаймні 3 дугам. Аналогічно, якщо деякі два цикли перетинаються, тоді існує така вершина, яка інцидентна принаймні 3 дугам. У двох випадках ми отримали суперечність.

Наслідок 1. При λ^{n-2} коефіцієнт має вигляд суми з відповідними знаками добутків ваг дуг (v', u'), (u, v') або петель (v', v'), (u', u'), де $u\ \omega \neq v$.

Наслідок 2. При λ^{n-1} коефіцієнт дорівнює сумі всіх можливих добутків ваг дуг простих циклів з сумарною кількістю дуг 1. Отже при λ^{n-1} коофіцєнт буде мати вигляд суми усіх ваг петель з відповідними знаками.

Теорема 1. Імпульсний процес на зв'язному орграфі можна привести до нестійкого імпульсного процесу додаванням однієї зваженої дуги.

Доведення. Розглянемо довільний зв'язний орграф, матриця суміжності якого є $A(n\times n)$. У ньому існує принаймні одна дуга (u', v') деякої ваги ω_1. Додамо дугу (v', u') ваги ω_2. Розглянемо коефіцієнт характеристичного многочлена $\det(A - I\lambda)$ при λ^{n-2}. З леми 1 і наслідку 1 з цієї ж леми випливає наступне: якщо в доданок коофіцієнта при λ^{n-}

[2] входить одна з ваг ω_1 чи ω_2, то відповідно в коефіцієнт входить також ω_2 чи ω_1. Тоді коефіцієнт при λ^{n-2} буде мати вигляд $\omega_1\omega_2 + d$.

Оскільки $\omega_1 \neq 0$, то змінюючи вагу ω_2 можна досягнути того, щоб виконувалась нерівність $\omega_1\omega_2 + d > C_n^2$. З іншого боку, з теореми Вієта маємо: $\omega_1\omega_2 + d = (x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n)$, де $x_1x_2... x_{n-1}x_n$ – корені характеристичного многочлена $\det(A - I\lambda)$.

Якщо імпульсний процес стійкий, то

$$|x_1| \leq 1, \forall i = 1,...,n \Rightarrow x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n \leq |x_1||x_2| + |x_1||x_3| + ... + |x_{n-1}||x_n| \leq C_n^2.$$

Ми отримали суперечність, а отже новий імпульсний процес нестійкий.

Теорема 2. Імпульсний процес на довільному орграфі можна звести до нестійкого імпульсного процесу додаванням зміною однієї зваженої петлі.

Доведення. Нехай ми будемо змінювати дугу ваги ω. З леми 1 наслідку 2 цієї леми випливає, що коефіцієнт при λ^{n-1} буде мати вигляд $\omega + d$, де ω – довільна петля, d – сума всіх інших петель.

Тоді ми можемо досягнути того, щоб виконувалось нерівність ω + d > n (де n – степінь матриці). Якщо процес стійкий, то $|x_i| \leq 1$. З теореми Вієта маємо, що $\omega + d = \sum x_i \leq \sum|x_i| \leq n$.

Ми отримали суперечність, що $\forall|x_i| \leq 1$, а отже новий імпульсний процес нестійкий.

Приклад *1.* Імпульсний процес на даному (Рис.1) звязному орграфі не можна привести до нестійкого імпульсного процесу зміною $n/3 - 1$ зваженими дугами.

Розглянемо приклад при кількості вершин: $n = 12$

З леми 1 випливає, що при λ^4 характеристичного многочлена даного орграфа буде знаходитись коефіцієнт виду:

$$(k_1k_4 + k_2k_3)(k_5k_8 + k_6k_7)(k_9k_{12} + k_{10}k_{11})(k_{16}k_{13} + k_{15}k_{14})$$

Розкривши дужки, ми переконаємося, що даний коефіцієнт дорівнює сумі, з однаковими знаками, добутків ваг дуг усіх циклів довжини 8. Інших простих циклів у цьому орграфі немає.

Тому характеристичне рівняння буде мати вигляд:

$$\lambda^{12} \pm \lambda^4(k_1k_4 + k_2k_3)(k_5k_8 + k_6k_7)(k_9k_{12} + k_{10}k_{11})(k_{16}k_{13} + k_{15}k_{14})=0.$$

Тепер підбираємо так, щоби

$$\begin{cases} k_1k_4 + k_2k_3 = 0 \\ k_5k_8 + k_6k_7 = 0 \\ k_9k_{12} + k_{10}k_{11} = 0 \\ k_{16}k_{13} + k_{15}k_{14} = 0 \end{cases}$$

Як бачимо, які б три дуги ми не змінювали, характеристичне рівняння буде мати вигляд $\lambda^{12} = 0$.

Аналогічно будується приклад для довільної кількості вершин, а також для імпульсного орграфа з довільною кількістю вершин.

Приклад 2. Довільний імпульсний процес на даному орграфі D не може бути приведений до стійкого імпульсного процесу видаленням не менше ніж $C_n^2 + n = (n+1)n/$

2 дугами.

Побудова прикладу: D має вигляд повного орграфа з вагами дуг строго більшими від одиниці.

Доведення. Візьмемо початковий імпульс з усіма додатними компонентами. Оскільки усі ваги дуг D додатні і строго більші за одиницю, то довільний цикл D буде нескінченно збільшувати імпульс на своїх вершинах. Зокрема нескінченно збільшувати імпульс будуть усі петлі (u', u') і усі цикли виду: (u', v'), (v', u'). Тому, щоби зробити імпульсний процес стійким на D, потрібно принаймні видалити усі петлі і по одній дузі з кожного циклу виду: (u', v'), (v', u'); для цього потрібно видалити не менше ніж $C_n^2 + n$ дуг. Виконаємо дані дії і запишемо матрицю ваг орграфа D^*:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{21} & . & . & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & 0 & a_{n-1\,n} \\ 0 & . & . & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Очевидно, що власні значення даної матриці усі дорівнюють нулю, отже ми отримали орграф D^*, який є імпульсно стійкий для всіх імпульсних поцесів.

1. Робертс Ф.С. Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. М., 1986
2. Ланкастер П. Теория Матриц. М., 1982
3. Оре О. Теория графов. М., 1980

УДК 621.372.542: 376.56

АЛГОРИТМИ І СТРУКТУРИ АДАПТИВНОГО РІЗНИЦЕВОГО КОДУВАННЯ З ПОПЕРЕДЖЕННЯМ ПЕРЕНАВАНТАЖЕННЯ ЗА КРУТИЗНОЮ

© І. Стрепко[1], О. Тимченко[2]
[1] Українська академія друкарства
[2] Національний університет "Львівська політехніка"

На основі аналізу методів адаптації різницевого кодування розроблені нові алгоритми та структурні схеми кодерів з попередженням перенавантаження за крутизною, що мають ефективну апаратну реалізацію.