УДК 62 : 681.3

# ОБГРУНТУВАННЯ ОПТИМАЛЬНОЇ СТРУКТУРИ ЦИФРОВИХ ПІ -, ПД - ТА ПІД - АЛГОРИТМІВ.

**© І. Ковела**
Національний університет "Львівська політехніка"

***За допомогою математичних методів, а також відповідних розрахунків обгрунтовується структура цифрових ПІ -, ПД - та ПІД - алгоритмів, оптимальних з огляду на близькість їх КЧХ до КЧХ неперервних прототипів, що дає змогу суттєво спростити проблеми параметричного синтезу цифрових АСР і алгоритмічного забезпечення програмованих мікропроцесорних контролерів.***

***Digital PI-, PD- and PID-algorithms which are optimal due to similarity of their integral frequency characteristics to these of continuous prototypes are investigated. The structure of the above is justified by applying mathematical notation and corresponding calculations. This allows for substantial simplification for the parametrical synthesis problem of digital ACS and algorithmic provision problem for PLCs.***

Сучасні системи безпосереднього цифрового керування та регулювання (БЦК) будуються на основі програмованих мікропроцесорних контролерів (ПМК) або персональних комп'ютерів (ПК), за допомогою яких програмним способом реалізуються відповідні алгоритми регулювання. При побудові систем регулювання на основі ПМК або мікроЕОМ існує принципова можливість реалізації алгоритмів будь-якої складності, однак, зважаючи на ряд причин техніко-економічного характеру, у даний час найбільш широко застосовуються різні модифікації типових лінійних (П-, ПД-, ПІ-, ПІД-) алгоритмів, що здатні забезпечити достатньо високу якість регулювання для більшості об'єктів. Як відомо, кількість неперервних типових алгоритмів регулювання досить обмежена, натомість кількість можливих їх дискретних аналогів може бути значно більшою. Це залежить від прийнятих способів дискретизації інтегральної та диференціальної складових алгоритмів регулювання..

Фахівцями накопичений багатий досвід розрахунку та налагодження автоматичних систем регулювання (АСР) з неперервними типовими алгоритмами, однак при переході до їх дискретних аналогів виникають серйозні труднощі, пов'язані як з вибором конкретних способів реалізації дискретних алгоритмів, так і з визначенням їх оптимальних параметрів. Це пояснюється тим, що властивості цифрових алгоритмів все ще недостатньо вивчені і, крім того, у більшості випадків необхідно визначати додатковий параметр налагодження – такт квантування T0. Прийнятного розв'язку задачі оптимального визначення параметрів налагодження цифрових алгоритмів, зокрема такту квантування, до недавнього часу не існувало. Як вказано у [1], така задача може бути розв'язана аналітично на основі багатокритеріального підходу. Проте у відомих джерелах практично відсутній аналіз властивостей дискретних аналогів типових неперервних алгоритмів регулювання (особливо це стосується так званих реальних ПІД - алгоритмів) і відсутні будь-які рекомендації щодо вибору їх структури.

Тому однією з найважливіших задач при розробці промислових цифрових АСР є обгрунтування оптимальної структури дискретних ПІ- та ПІД-алгоритмів.

Поставлену задачу необхідно розв'язувати у взаємозв'язку з прийнятим методом параметричного синтезу цифрової АСР. Враховуючи, що сталі часу промислових об'єктів переважно є набагато більшими від значень $T_0$, при яких працюють реальні цифрові АСР, а також багато інших факторів, параметричний синтез цифрових систем найдоцільніше здійснювати за їх неперервними прототипами.

Цифрова (точніше аналого-цифрова ) АСР відрізняється від неперервної тим, що у ній замість неперервного регулятора (НР) з передавальною функцією $W_{нр}(s)$ застосовується цифровий регулятор (ЦР) з передавальною функцією $W_{цр}(z)$, з'єднаний з неперервною частиною системи (об'єктом) за допомогою АЦП, ЦАП і екстраполятора з передавальною функцією $W_e(z, s)$. У процесі параметричного синтезу необхідно вибрати характеристики цифрових елементів так, щоби динамічні властивості аналого-цифрової системи і неперервної системи-прототипу практично збігалися у деякому діапазоні частот. Цю задачу можна конкретизувати як задачу дискретної апроксимації неперервного динамічного фільтра. Принципові відмінності у роботі неперервного та цифрового регуляторів зумовлені ефектами квантування сигналів за часом і рівнем, які у першому наближенні можна розглядати окремо.

Похибки, викликані квантуванням за рівнем, можуть бути достатньо малими за рахунок зменшення коефіцієнтів передачі АЦП - $\delta_A$ і ЦАП - $\delta_ц$.

Похибки, зумовленні квантуванням за часом, зручно проаналізувати, розглядаючи зміни у спектрі сигналу при проходженні його через імпульсний елемент (модулятор). Такий аналіз наводиться у ряді джерел, наприклад, в [2-4]. Встановлено, що проходження сигналу через імпульсний елемент супроводжується зміною його масштабу в $1/T_0$ разів, а також розмноженням його спектра вздовж осі частот. Отже, якщо припустити, що сигнал помилки регулювання на вході імпульсного елемента має спектр, обмежений деякою частотою *max*, тобто якщо

$$\left|E(j\omega)\right| \cong 0 \text{ при } \omega > \omega_{макс}, \tag{1}$$

то при $T_0 < \pi/\omega_{макс}$ за додаткової умови, що система відфільтровує усі бокові складові спектра вихідного сигналу $E^*(j\omega)$ імпульсного елемента за теоремою В.А. Котельникова-К.Шеннона, існує принципова можливість відновити неперервний сигнал, що надійшов на вхід імпульсного елемента, за його дискретними значеннями на виході. Хоча відновлення неперервного сигналу за його дискретними виборками не є завданням цифрових АСР, невиконання умови (1) призводить до зростання похибок керування.

Функції відновлювального пристрою в цифрових АСР на практиці, як правило, виконує екстраполятор нульового порядку, оскільки, як показано в [3], застосування більш складних екстраполяторів у цьому випадку є недоцільним. Естраполятор нульового порядку відіграє роль фільтра, що перетворює нескінченний спектр $U^*(j\omega)$ у скінченний $U(j\omega)$, оскільки за виконання умови $\omega_{макс} \leq \omega_{кв}/2 = \pi/T_0$, де $\omega_{кв} = 2\pi/T_0$ - частота квантування, цей фільтр можна вважати близьким до ідеального. Наприклад, при $\omega < \pi/T_0$ модуль його комплексної частотної характеристики $|W_e(j\omega)| \approx T_0$. В інших випадках неідеальність естраполятора нульового порядку як відновлюючого пристрою призводить до похибок керування двох видів. По-перше, нерівномірність його АЧХ і ФЧХ в інтервалі частот $|\omega| < \omega_{макс}$ викликає динамічні спотворення у вихідному сигналі цифрового регулятора, що веде до відхилення значень регульованої величини від бажаних; по-друге, ненульові значення АЧХ екстраполятора при $|\omega| > \omega_{макс}$ зумовлюють появу вищих гармонік у вихідному сигналі ЦР, в результаті чого цей сигнал або його похідні стрибкоподібно змінюються з періодом $T_0$. Такі стрибки, лише частково згладжуючись при проходженні через неперервну частину системи, спричиняють малі нелінійні коливання (пульсації) регульованої величини з періодом $T_0$ та ведуть до зростання похибки і до її нестабільності всередині періоду дискретності.

Крім значення такту квантування $T_0$ і виду екстраполятора, на якість роботи цифрової АСР суттєво впливає алгоритм роботи цифрового регулятора. Оскільки при неперервній регульованій величині бажаний алгоритм функціонування регулятора мав би бути неперервним, то в ідеалі цифровий регулятор повинен формувати вихідний сигнал залежно від значень вхідного сигналу в усі попередні моменти часу, а не тільки залежно від його значень у дискретні моменти часу $t = kT_0$. Тому ідеальний алгоритм роботи ЦР не може бути простішим, ніж алгоритм інтерполяції його вхідної величини для довільних моментів часу усередині періоду дискретності. Як відомо з числового аналізу, функцію, що має нескінченну множину похідних, що не дорівнюють нулю, можна точно замінити інтерполяційним поліномом лише нескінченно високого порядку. Отже, бажаний неперервний алгоритм регулювання не може бути реалізований точно навіть у випадку застосування ідеального відновлювального пристрою. Разом з тим ступінь наближення реального алгоритму до ідеального підвищується при ускладненні алгоритму роботи цифрового регулятора.

Висновок про те, що алгоритм роботи ЦР повинен бути таким, щоби забезпечити близькість динамічних властивостей цифрового регулятора і його неперервного прототипу, необхідно конкретизувати, оскільки цю близькість можна трактувати по-різному.

Зокрема, якщо ставиться завдання, щоби вихідні сигнали бажаного неперервного регулятора $U^*_{нр}(t)$ і його дискретного аналога $U^*_{цр}(t)$ збігалися у дискретні моменти часу, кратні $T_0$, то алгоритм функціонування цифрового регулятора повинен описуватися $z$-передавальною функцією

$$W_{цр}(z) = U(z)/E(z) = Z\left[We(s,z)W_{нр}(s)\right] = \left(1 - z^{-1}\right)Z\left[W_{нр}(s)/s\right]. \tag{2}$$

Цифровий регулятор з передавальною функцією (2) досить добре наближено (що зумовлено використанням естраполятора нульового порядку замість ідеального) апроксимує неперервний регулятор, але його роль у цифровій системі покладається на цифровий обчислювальний пристрій.

Коли ж потрібно досягти ідентичності вихідних сигналів бажаного неперервного регулятора і його дискретного аналога у довільні моменти часу, то сигнал $U^*_{цр}(t)$ необхідно перетворити у неперервний за допомогою ЦАП, запам'ятовувальний пристрій якого виконує роль екстраполятора нульового порядку, а також врахувати коефіцієнт передачі модулятора. При цьому вказана вимога може бути записана у вигляді

$$\frac{1}{T_0} W_{цр}(s) W_e(z) \cong W_{нр}(s)/W_e(s), \tag{3}$$

де $W_{цр}(z)$ визначається за виразом (6). Коректність такого підходу підтверджується тим, що

$$\lim_{T_0 \to \infty}\left[W_{екр}(s)\right] = W_{нр}(s). \qquad (10)$$

Отже, чим меншим є значення $T_0$, тим ближчим є еквівалентний неперервний регулятор, алгоритм роботи якого реалізується цифровим обчислювальним пристроєм, до бажаного неперервного. Загалом еквівалентний регулятор, як і його прототип, залишається лінійним, оскільки він може бути реалізований за допомогою ланок підсилення та запізнення, які є лінійними.

У цьому аспекті необхідно також звернути увагу на особливості модулятора з амплітудно-імпульсною модуляцією, який перетворює неперервний сигнал в послідовність дельта-функцій. Це перетворення характеризується стрибкоподібними операціями, в результаті яких сигнал $E(t)$ з класу неперервних переходить у клас дискретних сигналів $E^{*}(t)$. Проте кількісна сторона такого перетворення підпорядковується лінійному закону в тому розумінні, що для нього справедливим є принцип суперпозиції. Отже, модулятор виконує свою специфічну роботу лінійно [2].

Для того, щоб скористатися при синтезі цифрових АСР методами теорії неперервних систем з застосуванням еквівалентного неперервного регулятора (9), необхідно спочатку відповідно до (6) здійснити дискретизацію бажаного неперервного алгоритму.

Розглянемо деякі особливості дискретного подання неперервних алгоритмів регулювання, основними з яких є:

- ПІ - алгоритм

$$W_{піи}(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right); \qquad (11)$$

- ідеалізований ПІД- алгоритм

$$W_{1и}(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right), \qquad (12)$$

- реальні ПІД - алгоритми :

$$W_{2и}(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{\frac{T_d}{N}s + 1}\right), \qquad (13)$$

$$W_{3и}(s) = K_p\left[1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{\left(\frac{T_d}{N}s + 1\right)^2}\right]; \qquad (14)$$

У передавальних функціях (11) - (14): $K_p$ - коефіцієнт підсилення ; $T_i$, $T_d$ - сталі часу інтегрування та диференціювання; $N$ – коефіцієнт, який найчастіше фіксується виробниками контролерів у межах $N = 3...10$. Зокрема, у вітчизняних контролерах, що входять до комплексів Ремiконт Р-130, Унiконт, Ломiконт, прийнято $N = 8$.

На практиці для спрощення та зменшення обсягу обчислень для дискретизації неперервних алгоритмів регулювання застосовуються в основному наближені методи, що випливають з найпростіших методів чисельного інтегрування. Тобто процес дискретизації неперервних передавальних функцій регуляторів зводиться до простої заміни в них комплексної змінної $s$ на $s'$ відповідно до формул:

$$s' = \frac{1}{T_0}\frac{1 - z^{-1}}{z^{-1}}, \text{ (метод Ейлера)} \tag{15}$$

$$s' = \frac{1}{T_0}\left(1 - z^{-1}\right), \text{ (метод прямокутників з надлишком)} \tag{16}$$

$$s' = \frac{2}{T_0}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \text{ (метод трапецій - білінійне перетворення)} \tag{17}$$

Легко бачити, що застосовуючи до (11) – (14) одну з підставок (15) – (17) або ж різні їх комбінації, можна одержати досить значну кількість можливих дискретних аналогів неперервних алгоритмів. Деякі з типових дискретних алгоритмів, утворених на основі такого підходу, наводяться у літературі, зокрема, в [1,4 - 7].

Очевидно, що одержані таким способом дискретні алгоритми не є рівноцінними перш за все щодо їх близькості до неперервних прототипів, якості регулювання, яку вони здатні забезпечити, а також за обчислювальними затратами, необхідними для їх програмної реалізації.У такій ситуації задача параметричного синтезу цифрової АСР стає невизначеною, оскільки невідомо, який з можливих варіантів дискретних алгоритмів доцільно використати у кожному конкретному випадку. Так само невизначеними при цьому залишаються і питання, пов'язані з проектуванням алгоритмічного забезпечення програмованих контролерів. Отже, ця проблема потребує докладного аналізу, який у відомих джерелах практично відсутній.

За критерій оптимальності цифрових алгоритмів у даній роботі принятий ступінь наближення їх КЧХ до КЧХ їх неперервних прототипів. Такий підхід грунтується на тому, що неперервну систему(ланку) можна розглядати як граничний випадок цифрової при зменшенні такту квантування до нуля (при однакових усіх інших параметрах) і має на меті забезпечити максимальне наближення показників якості цифрових систем до неперервних.

Для розв'язання поставленої задачі загалом розглянемо спочатку проблеми, пов'язані з апроксимацією окремих складових алгоритмів (11) – (14) з врахуванням (9).

***Пропорційна складова.*** Пропорційна складова $W_{pe}(s)$ алгоритму еквівалентного неперервного регулятора на підставі (9) має вигляд

$$W_{pe}(s) \cong \frac{1}{T_0}W_e(s) \cong \frac{1}{T_0}\frac{1 - e^{-T_0 s}}{s}. \tag{18}$$

У (18) і далі коефіцієнт підсилення $K_p$ для спрощення не враховується, оскільки це не впливає на кінцеві висновки.

Як відомо, АЧХ та ФЧХ екстраполятора нульового порядку описується виразами:

$$A_e(\omega) = |W_e(j\omega)| = T_0 \frac{|\sin(\omega T_0/2)|}{|\omega T_0/2|} \tag{19}$$

$$\varphi_e(\omega) = \arg W_e(j\omega) = -\omega T_0/2 . \tag{20}$$

При малих частотах $(\omega \le \pi/2T_0)$, $A_e(\omega) \cong 1$. Отже, при реалізації еквівалентної пропорційної складової (18) вноситься запізнення, яке дорівнює $T_0/2$, а її амплітуда є близькою до одиниці. У зв'язку з недоцільністю застосування в промислових цифрових АСР екстраполяторів вищого порядку пропорційна складова алгоритмів регулювання альтернативних варіантів не має.

***Оптимальна інтегральна складова.*** Інтегральна складова $W(s)=1/T_i s$ в принципі може бути апроксимована за допомогою будь-якої з підстановок (15) - (17). Ймовірно, враховуючи, що (17) забезпечує найвищу точність інтегрування, саме цей метод застосовують провідні виробники контролерів, зокрема, фірма *Schneiderelectric* при реалізації цифрових алгоритмів регулювання.

Розглянемо спочатку найпростіший варіант реалізації інтегральної складової за допомогою (16). Тоді в реальній цифровій системі одержимо відповідно до (9) еквівалентний І-алгоритм з передавальною функцією

$$W_{ie}(s) \cong \frac{1}{T_0} \frac{T_0}{T_i} \frac{1}{1-z^{-1}} \frac{1-z^{-1}}{s} \cong \frac{1}{T_i s}, \tag{21}$$

тобто у даному випадку реалізується ідеальний неперервний І-алгоритм. Це той рідкісний випадок, коли бажаний неперервний алгоритм вдається точно реалізувати цифровим способом.

Якщо ж вдатися до більш точного числового інтегрування за методом трапецій, то на підставі (17) і (9) одержимо

$$W_{ie}(s) \cong \frac{1}{T_i s} \frac{1+e^{-T_0 s}}{2} . \tag{22}$$

З порівняння (21) і (22) видно, що при застосуванні числового інтегрування за методом трапецій у передавальній функції еквівалентного регулятора з'являється додатковий множник $(1 + e^{-T_0 s})/2$, який можна звести до вигляду

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = \cos\left(\frac{\omega T_0}{2}\right) e^{-\frac{j\omega T_0}{2}} . \tag{23}$$

З (23) можна зробити висновок, що у цьому випадку існує запізнення, що дорівнює

$T_0/2$, а також спотворюється амплітуда вихідного сигналу І-регулятора.

Аналізуючи подібним чином еквівалентний І-алгоритм, який може бути реалізований при застосуванні (15), можна побачити, що порівняно з (21) вноситься запізнення, що дорівнює $T_0$.

Отже, далеко не найкращий з огляду на точність виконання самої операції інтегрування метод (17) дає майже ідеальне наближення до неперервного інтегратора при реалізації еквівалентного регулятора. Він же є найпростішим в реалізації, і тому інтегральну складову дискретних алгоритмів регулювання доцільно реалізувати тільки за методом прямокутників з надлишком, тобто відповідно до (17).

Враховуючи наведені міркування, можна додати, що застосування більш складних і точних методів числового інтегрування при реалізації інтегральних складових алгоритмів регулювання є недоцільним.

***Оптимальна дискретизація диференціальних складових ПІД- алгоритмів***. Дискретизація ідеалізованої дифскладової ідеалізованого ПІД - алгоритму (12) може бути здійснена лише за виразом (16), що відповідає її апроксимації першою оберненою різницею. Підставою для такого висновку є те, що при застосуванні (15) не виконується умова можливості фізичної реалізації одержаної таким способом дискретної передавальної функції, а застосування (17) веде до утворення дискретного алгоритму з полюсом $z = -1$ , в результаті чого втрачається стійкість алгоритму регулювання і системи загалом.

Складнішими є проблеми, пов'язані з дискретизацією реальних дифскладових алгоритмів (13), (14).

Позначивши реальну дифскладову алгоритму (13) як $Wd_2(s)$, і застосовуючи її апроксимацію за виразами (16), (17), отримаємо такі її дискретні аналоги :

$$Wd_{21}(z) = \frac{\dfrac{T_d}{(T_d/N)+T_0}\left(1-z^{-1}\right)}{1-\dfrac{T_d/N}{(T_d/N)+T_0}z^{-1}}, \tag{24}$$

$$Wd_{22}(z) = \frac{\dfrac{2T_d}{(2T_d/N)+T_0}\left(1-z^{-1}\right)}{1-\dfrac{(2T_d/N)-T_0}{(2T_d/N)+T_0}z^{-1}}. \tag{25}$$

Подібно отримаємо дискретні аналоги дифскладової $Wd_3(s)$ алгоритму (14):

$$Wd_{31}(z) = \frac{\dfrac{T_d}{(T_d/N+T_0)^2}\left(1-z^{-1}\right)}{\left(1-\dfrac{T_d/N}{(T_d/N)+T_0}z^{-1}\right)^2}, \tag{26}$$

$$Wd_{32}(z)=\frac{\dfrac{2T_d\,T_0}{\left(\left(2T_d/N\right)+T_0\right)^2}\left(1-z^{-2}\right)}{\left(1-\dfrac{\left(2T_d/N\right)-T_0}{\left(2T_d/N\right)+T_0}\,z^{-1}\right)^2}, \tag{27}$$

Для зведення дифскладових (24) – (27), а також $Wd_2(s)$, $Wd_3(s)$ до безрозмірної форми введемо позначення: $p=sT_0$, $Td_1=Td/T_0$; $z=e^{sT_0}=e^{p}$. Тоді дифскладові алгоритмів (13), (14) та їх еквівалентні вирази з врахуванням (24) – (27) і (9) набудуть вигляду:

$$Wd_2(p)=\frac{Td_1 p}{\dfrac{Td_1}{N}p+1}, \tag{28}$$

$$Wd_{21e}(p)=\frac{\dfrac{Td_1}{\left(Td_1/N\right)+1}\left(1-e^{-p}\right)}{1-\dfrac{Td_1/N}{\left(Td_1/N\right)+1}e^{-p}}\,\frac{1-e^{-p}}{p}, \tag{29}$$

$$Wd_{22e}(p)=\frac{\dfrac{2Td_1}{2\left(Td_1/N\right)+1}\left(1-e^{-p}\right)}{1-\dfrac{2\left(Td_1/N\right)-1}{2\left(Td_1/N\right)+1}e^{-p}}\,\frac{1-e^{-p}}{p}, \tag{30}$$

$$Wd_3(p)=\frac{Td_1 p}{\left(\dfrac{Td_1}{N}p+1\right)^2}, \tag{31}$$

$$Wd_{31e}(p)=\frac{\dfrac{Td_1}{\left(\left(Td_1/N\right)+1\right)^2}\left(1-e^{-p}\right)}{\left(1-\dfrac{Td_1/N}{\left(Td_1/N\right)+1}e^{-p}\right)^2}\,\frac{1-e^{-p}}{p}, \tag{32}$$

$$Wd_{32e}(p)=\frac{\dfrac{2Td_1}{\left(\left(2Td_1/N\right)+1\right)^2}\left(1-e^{-2p}\right)}{\left(1-\dfrac{2\left(Td_1/N\right)-1}{2\left(Td_1/N\right)+1}e^{-p}\right)^2}\,\frac{1-e^{-p}}{p}. \tag{33}$$

Характеристики еквівалентних реальних дифскладових

| $Td_1$ | $Wd_{21e}$ | | $Wd_{22e}$ | | $Wd_{31e}$ | | $Wd_{32e}$ | | Коефіцієнти | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\delta A_{21}$ | $\delta F_{21}$ | $\delta A_{22}$ | $\delta F_{22}$ | $\delta A_{31}$ | $\delta F_{31}$ | $\delta A_{32}$ | $\delta F_{32}$ | $a_{21}, a_{31}$ | $a_{22}, a_{32}$ |
| 5 | -3.7 | -28.5 | 0.38 | -13.0 | -6.7 | -33.5 | 0.35 | -15.7 | 0.38 | 0.11 |
| 10 | -6.0 | -31.8 | 0.30 | -15.4 | -11.4 | -47.3 | 0.19 | -24.7 | 0.93 | 0.92 |
| 20 | -8.0 | -38.4 | 0.10 | -21.6 | -15.8 | -36.9 | -0.22 | -22.3 | 0.71 | 0.67 |
| 30 | -8.1 | -46.1 | -0.07 | -29.7 | -15.8 | 44.3 | -0.55 | -0.55 | 0.79 | 0.76 |
| 40 | -7.4 | -55.7 | -0.17 | -39.6 | -14.5 | 17.3 | -0.77 | 27.3 | 0.83 | 0.82 |
| 50 | -6.7 | -68.0 | -0.24 | -51.6 | -12.9 | 9.6 | -0.90 | 20.7 | 0.86 | 0.85 |
| 60 | -6.0 | -83.5 | -0.29 | -66.3 | -11.4 | 6.2 | -0.99 | 17.5 | 0.88 | 0.87 |
| 70 | -5.4 | -103.1 | -0.32 | -84.4 | -10.1 | 4.4 | -1.0 | 15.7 | 0.90 | 0.89 |
| 80 | -4.9 | -128.3 | -0.34 | -107.2 | -9.1 | 3.3 | -1.1 | 14.5 | 0.91 | 0.90 |
| 90 | -4.5 | -161.6 | -0.35 | -136.7 | -8.3 | 2.5 | -1.1 | 13.7 | 0.92 | 0.91 |
| 100 | -4.1 | -207.3 | -0.36 | -176.1 | -7.6 | 2.03 | -1.1 | 13.0 | 0.93 | 0.92 |

Отже, враховуючи, що $N$ = const, коефіцієнти передавальних функцій (28) – (33) залежать лише від безрозмірної сталої часу диференціювання $Td_1$ і у такому вигляді вказані передавальні функції можна використати для порівняльного аналізу КЧХ різного виду еквівалентних дифскладових для оцінки їх близькості до неперервних прототипів. Діапазон можливих значень $Td_1$ можна оцінити на підставі таких міркувань. Якщо прийняти, що значення $T_0 = (0.2 \div 2)$ с, як це реалізовано у вітчизняних контролерах, а, наприклад, $Td = (2 \div 40)$ с, то $Td_1 = 1 \div 200$.

Для дослідження КЧХ дифскладових введемо безрозмірну частоту $\Omega = \omega T_0$. Підставляючи $p = j\Omega$ у (28) - (33), можна для ряду значень $Td_1$ обчислити амплітуди і фази для кожної з дифскладових у деякому діапазоні частот. Результати розрахунків наведені у таблиці, де $\delta_A$ і $\delta_F$ – це відносні амплітудні та фазові похибки при частоті $\omega = \pi/10T_0$ ($\Omega = \pi/T_0$), виражені в процентах. Індекси при позначеннях похибок ідентифікують відповідну дифскладову. При обчисленні похибок значення амплітуди (фази) еквівалентних дифскладових вважалися наближеними, а для відповідного неперервного прототипу – точними.

У таблиці наведені також значення коефіцієнтів $a_{21}$, $a_{22}$, $a_{31}$, $a_{32}$, які є полюсами передавальних функцій еквівалентних дифланок (29) – (34).

$$a_{21} = a_{31} = \frac{Td_1 / N}{(Td_1 / N) + 1}, \tag{34}$$

$$a_{22} = a_{32} = \frac{(2Td_1 / N) - 1}{(2Td_1 / N) + 1}. \tag{35}$$

Загальний висновок на підставі даних, наведених у таблиці, полягає в тому, що найкраще наближення КЧХ до характеристик неперервних прототипів забезпечують еквівалентні дифланки $Wd_{22e}$ і $Wd_{32e}$, утворені апроксимацією за методом білінійного перетворення.

Крім того, як видно з таблиці, полюси цих ланок $a_{22}$, $a_{32}$ є дещо меншими за модулем, що забезпечує більшу стійкість таких дифланок порівняно з іншими.

***Оптимальні структури дискретних ПІ- та ПІД - алгоритмів***. Наведені вище міркування і результати розрахунків дають можливість обгрунтовано визначити відповідно до (6) оптимальні з огляду на близькість до неперервних прототипів (11) - (14) структури дискретних алгоритмів :

- ПІ - алгоритм:

$$W_{пц}(z) = K_p \left( 1 + \frac{T_0}{T_i} \frac{1}{1 - z^{-1}} \right); \tag{34}$$

- ПІД - алгоритми:

$$W_1(z) = K_p \left[ 1 + \frac{T_0}{T_i} \frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{T_d}{T_0} \left( 1 - z^{-1} \right) \right], \tag{35}$$

$$W_{2ц}(z) = K_p \left[ 1 + \frac{T_0}{T_i} \frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{\dfrac{2T_d}{(2T_d / N) + T_0} \left( 1 - z^{-1} \right)}{1 - \dfrac{(2T_d / N) - T_0}{(2T_d / N) + T_0} z^{-1}} \right], \tag{36}$$

$$W_{3ц}(z) = K_p \left\{ 1 + \frac{T_0}{T_i} \frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{\dfrac{2T_d T_0}{\left( (2T_d / N) + T_0 \right)^2} \left( 1 - z^{-2} \right)}{\left[ 1 - \dfrac{(2T_d / N) - T_0}{(2T_d / N) + T_0} z^{-1} \right]^2} \right\}. \tag{37}$$

З (36) і (37), приймаючи $T_i = \infty$, можна одержати також відповідні оптимальні цифрові ПД - алгоритми.

Треба зауважити, що, коли застосувати для апроксимації реальних дифскладових найпростіший спосіб, а саме (16), то з порівняння (24) і (25), (26) і (27) можна побачити, що застосування білінійного перетворення дифскладових майже не впливає на складність алгоритмів. Тому апроксимація реальних дифскладових за допомогою білінійного перетворення, забезпечуючи набагато краще наближення до неперервного прототипу, не викликає якихось значних ускладнень в програмній реалізації дискретних алгоритмів. Проведені нами дослідження характеристик АСР з різними варіантами можливих дискретних аналогів неперервних алгоритмів підтвердили, як і очікувалося, переваги алгоритмів (34) - (37)

Отже, саме алгоритми (34) - (37) потрібно брати за основу при розробці алгоритмічного забезпечення програмованих мікропроцесорних контролерів та реалізації АСР.

Крім того, подання цифрових алгоритмів у вигляді (34) - (37) є зручним для їх програмної реалізації за методом паралельного програмування, що пом'якшує вимоги щодо точності реалізації коефіцієнтів цих алгоритмів.

1. Изерман Р. Цифровые системы управления. М.. 1984.
2. Микропроцессорные системы автоматического регулирования /Под ред. В.В Солодовникова. М., 1991.
3. Микропроцессорные системы автоматического управления. Под ред. В.А. Бесекерского. Л., 1988.
4. Ротач В.Я. Теория автоматического управления теплоэнергетическими процессами. М., 1985.
5. Романенко В.Д.,Игнатенко Б.В. Адаптивное управление технологическими процессами на базе микроЭВМ. К., 1990.
6. Шавров А.В., Солдатов В.В. Многокритериальное управление в условиях статистической неопределенности. М., 1990.
7. Ковела І.М. Лінійні дискретні алгоритми регулювання другого порядку //Автоматика, вимірювання та керування. Львів. 1998. № 324. с.9-15.

# ПОТОКОВИЙ ПРОЦЕСОР ШВИДКИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

**© О. Ліскевич, М. Яцимірський**
Національний університет "Львівська політехніка"

***Синтезовано універсальний потоковий процесор швидких тригонометричних перетворень, що реалізує перетворення Фур'є, Хартлі, косинусне та синусне. Наведено структурні схеми основних функціональних вузлів пристрою, а також часову діаграму симуляції роботи процесора.***

***Universal fast trigonometric transformations stream processor, which performs Fourier, Hartley, cosine and sine transformations is synthesized.. The structural schemes of basic functional units and simulation timetable of the proposed device are given.***

## Вступ

Дискретні швидкі тригонометричні перетворення (ШТП) у наш час застосовують для розв'язання широкого кола задач [1]. При цьому в останні роки значно підвищився інтерес до побудови універсальних алгоритмів та засобів обчислення цих перетворень [2-10]. Зокрема, в [2,3] наведені універсальні алгоритми для обчислення косинусних