

3. Розв'язок задач такого типу вимагає застосування апарата обчислювальної математики, що ґрунтується на теорії інтегрального, диференціального та варіаційного числення з подальшою алгоритмічно-програмною реалізацією на персональних комп'ютерах.

1. Чабан А. Особливості Ψ - та A -моделей асинхронного мотора у фазних координатах // Електротехніка і електромеханіка. – 2005. – № 4. – С. 37–39. 2. Чабан А. Математичне моделювання електромеханічних коливних процесів багатомасової системи з асинхронним приводом // Електротехніка і електромеханіка. – 2006. – № 2. – С. 62–65. 3. Чабан А. Математична модель двовузлової електромашиної системи // Вісник Національного університету “Львівська політехніка” “Електромеханічні та електроенергетичні системи” – 2005. – № 544 – С. 155–160. 4. Чабан А. Математичне моделювання коливних процесів у двовузловій багатомашинній системі з глибокопазними асинхронними приводами // Машинознавство. – 2006. – №4. – С. 33–38. 5. Чабан А. Математичне моделювання електромеханічних коливних процесів на прикладі системи парова турбіна – турбогенератор // Електротехніка і електромеханіка. – 2006. – № 4. – С. 37–41. 6. Харченко Е.В. Динамические процессы буровых установок. – Львов: Світ – 1991. – 176 с. 7. Харченко С.В., Колесник К.К. Зниження віброактивності привідних систем шляхом застосування пружних муфт квазінульової жорсткості // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2003. – № 54. – С. 66–72.

УДК 624.04(075.8)

Ф.Л. ШЕВЧЕНКО

Донецкий национальный технический университет

УПРОЩЕННЫЙ ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

© Шевченко Ф.Л., 2006

Запропоновано спрощений засіб динамічного розрахунку однопрольотних балок з розподіленими параметрами за наявності зосереджених мас, який ґрунтується на відомих значеннях частот основного тону коливань.

Simplified version of dynamic calculation for single beams with distributed constants in the presence of localized masses is presented in this work based on known values of frequency of main oscillation tone.

Известно, что динамический расчет систем с распределенными параметрами сводится к решению волнового уравнения при продольных и крутильных колебаниях или уравнения четвертого порядка при поперечных колебаниях. Однако эти расчеты, особенно при изгибных деформациях, сопряжены с некоторыми осложнениями в связи с составлением уравнения деформированной балки в гиперболо-тригонометрических или динамических функциях Крылова.

В инженерной практике расчета таких систем широко используются различные приближенные способы, суть которых заключается в замене системы с распределенными параметрами одномассовой системой для определения частоты основного тона колебаний [1]. Точность таких способов в значительной степени зависит от удачного выбора аппроксимирующего уравнения деформированного состояния заданной системы и от выбора положения сечения, куда приводится сосредоточенная масса в эквивалентной системе. Однако в этом расчете нет необходимости, если ограничиваться лишь вычислением приближенного значения основной частоты собственных колебаний системы с распределенными параметрами, т.к. частотные уравнения приводятся в справочной [2] и другой литературе [3, 4], а в случае необходимости их составление не представляет трудностей.

Заметим, что целесообразность приближенного расчета будет в том случае, когда распределенную массу системы вместе с сосредоточенными массами приведем в сечение, испытывающее возмущающую нагрузку. При этом в случае гармонической нагрузки достаточно вычислить лишь коэффициент нарастания колебаний $\nu = (1 - \theta^2 / \omega^2)^{-1}$, а при ударном воздействии нагрузки – динамический коэффициент $k_d = 1 + \sqrt{1 + 2h\eta/f}$, что потребует вычисления лишь приведенной массы и единичного квазистатического перемещения.

Проиллюстрируем такой приближенный расчет на конкретных примерах.

Пример 1. Однопролетная балка с погонной массой m и сосредоточенной массой M испытывает воздействие гармонической силы $P(t) = P \sin \theta t$ (рис. 1). Найти динамическое напряжение при заданных параметрах: $EJ = 3,68 \cdot 10^6 \text{ Нм}^2$, $l = 4 \text{ м}$, $m = 400 \text{ кг/м}$, $M = 1200 \text{ кг}$, $\theta = 10 \text{ 1/с}$.

1. Заменяем заданную балку (рис. 1, а) условной одномассовой (рис. 1, б). Используем известное частотное уравнение для балки с распределенной массой интенсивностью m при подвижной скользящей заделке на левой опоре и защемлении на правой (рис. 1, в): $\text{tg} \lambda l = -\text{th} \lambda l$, откуда получено $\lambda = kl = 2,365$.

При необходимости частотное уравнение можно получить из уравнения изогнутой оси балки при колебаниях

$$y(x) = A \text{ch} kx + B \text{sh} kx + C \cos kx + D \sin kx,$$

подчинив его граничным условиям:

$$y'(0) = y'''(0) = 0, \quad y(l) = y'(l) = 0.$$

2. Вычисляем единичное перемещение δ_{11} из уравнения изогнутой оси балки при статическом нагружении единичной силой (рис. 1, г)

$$y(x) = y_0 - \frac{M_{\text{и}} x^2}{2EJ} + \frac{x^3}{6EJ}.$$

Из условий защемления $y'(l) = y(l) = 0$ находим начальные параметры:

$$M_{\text{и}} = \frac{l}{2}, \quad y_0 = \frac{l^3}{12EJ}.$$

3. Из условия равенства частоты первого тона колебаний заданной балки

$$\omega_1 = \frac{\lambda^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} \tag{1}$$

и частоты колебаний одномассовой балки

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} m \xi_0}} \tag{2}$$

находим коэффициент приведения распределенной массы балки в сечение с возмущающей силой

$$\xi_0 = \frac{12}{2,365^4} = 0,38357.$$

4. Находим частоту колебаний эквивалентной системы (рис. 1, б)

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11}(M + m \xi_0)}} = \sqrt{\frac{12 \cdot 3,68 \cdot 10^6}{4^3(1200 + 400 \cdot 4 \cdot 0,38358)}} = 19,504 \text{ 1/с}.$$

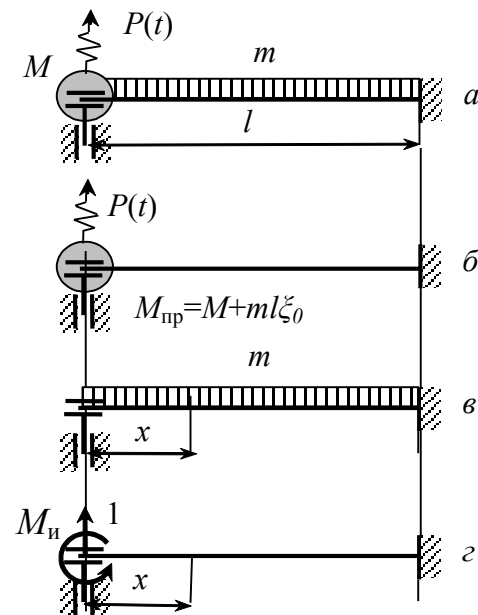


Рис. 1

Заметим, что спектр частот собственных колебаний заданной балки с отношением масс $\xi = M/ml = 0,75$ находим из уравнения

$$\operatorname{tg} \lambda = \xi \lambda \left(\frac{1}{\operatorname{ch} \lambda \cdot \cos \lambda} - 1 \right) - \operatorname{th} \lambda,$$

откуда $\lambda = 1,807043$, а $\omega_1 = 19,575$ 1/с.

5. Вычисляем коэффициент нарастания колебаний

$$\nu = \frac{1}{1 - \theta^2 / \omega^2} = \frac{1}{1 - 10^2 / 19,5^2} = 1,3566.$$

6. Динамический изгибающий момент

$$M_{\text{и}} = \frac{Pl}{2} \nu = \frac{2500 \cdot 4}{2} \cdot 1,3566 = 6784 \text{ Нм, а напряжение } \sigma = \frac{M_{\text{и}}}{W} = \frac{6784}{184} = 36,8 \text{ МПа.}$$

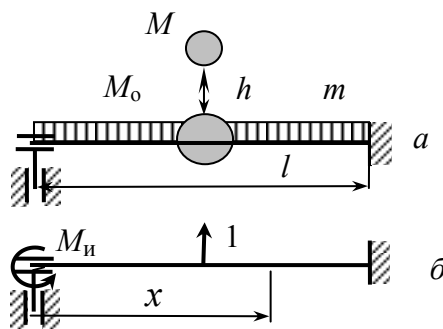


Рис. 2

Пример 2. На вышерассмотренную балку с распределенной массой $m = 400$ кг/м и сосредоточенной посередине пролета массой $M_0 = 1200$ кг падает неупругая масса $M = 500$ кг с высоты $h = 2$ см (рис. 2).

Вычислить динамическое напряжение.

В этой задаче распределенную массу нужно привести к сосредоточенной массе на середине пролета.

1. Вычисляем единичное перемещение в месте падения груза из уравнений (рис. 2, б):

$$y(x) = y_0 - \frac{M_{\text{и}} x^2}{2EJ} + \frac{(x - l/2)^3}{6EJ},$$

$$y'(x) = -\frac{M_{\text{и}} x}{EJ} + \frac{(x - l/2)^2}{2EJ}.$$

Из условий защемления $y'(l) = y(l) = 0$ находим:

$$M_{\text{и}} = \frac{l}{8}, \quad y_0 = \frac{l^3}{24EJ}.$$

$$\delta_{11} = y(l/2) = \frac{5}{192} \frac{l^3}{EJ}.$$

2. Статический прогиб от падающего груза

$$f = \Delta_{1p} = \delta_{11} Mg = \frac{500 \cdot 9,81 \cdot 5}{192 \cdot 3,68 \cdot 10^6} = 2,22 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

3. Из равенства частот находим коэффициент приведения массы балки

$$\frac{2,365^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = \sqrt{\frac{192EJ}{5l^3 \cdot m \xi_0}}, \quad \xi_0 = \frac{192}{5 \cdot 2,265^4} = 1,227.$$

4. Коэффициент передачи энергии

$$\eta = \frac{M}{M + M_0 + m \xi_0} = \frac{500}{500 + 1200 + 400 \cdot 4 \cdot 1,227} = 0,1365.$$

5. Динамический коэффициент при ударе

$$k_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f} \eta} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 2}{0,222} \cdot 0,1365} = 2,86.$$

6. Динамический изгибающий момент и напряжение

$$M_d = \frac{Mgl}{8} k_d = \frac{500 \cdot 9,81}{8} 4 \cdot 2,86 = 70141 \text{ Нм}, \quad \sigma = 38,1 \text{ МПа}.$$

Если на невесомой балке приложено несколько сосредоточенных масс (рис. 3, а), то для вычисления приближенного значения частоты первого тона колебаний нужно заменить ее балкой с условной распределенной массой (рис. 3, б).

Выше указано, что для вычисления коэффициента приведения распределенной массы балки к сосредоточенной ξ_0 нужно приравнять частоты колебаний этих двух балок (рис. 3, б, в)

$$\frac{\lambda^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} M_{пр}}} = \sqrt{\frac{k_{11}}{l^3} \frac{EJ}{m \xi_0}},$$

где обозначено $\delta_{11} = \frac{l^3}{k_{11} EJ}$.

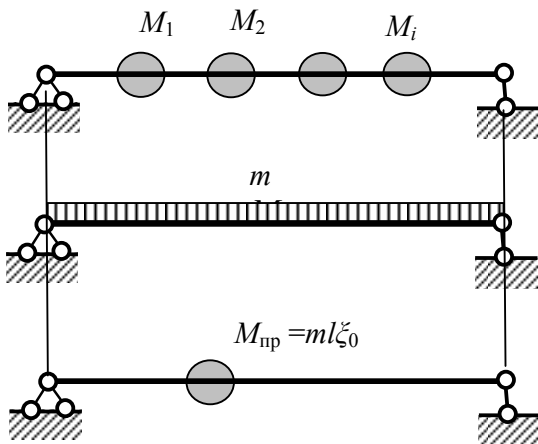


Рис. 3

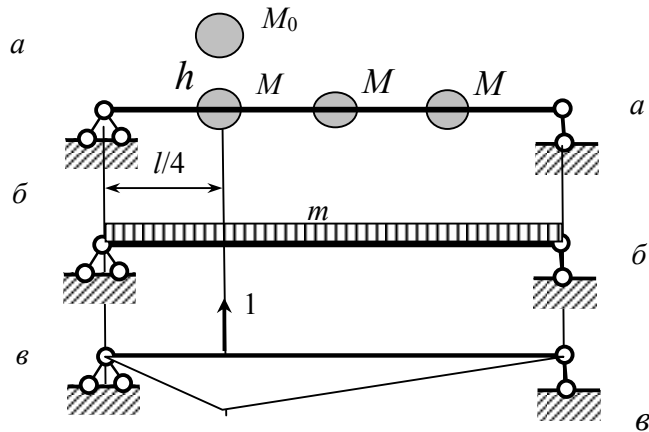


Рис. 4

Отсюда находим коэффициент для определения сосредоточенной массы $\xi_0 = \frac{k_{11}}{\lambda^4}$ и тогда сосредоточенная масса выражается через распределенную $M_{пр} = m \xi_0$, и наоборот, распределенную массу можно найти через сосредоточенную $m_i = \frac{M_i}{l \xi_i}$.

Если на балке есть несколько сосредоточенных масс, то общая интенсивность распределенной массы будет определяться суммой

$$\sum m_i = \sum \frac{M_i}{l \xi_i} \quad \text{или} \quad l \sum m_i = \sum \frac{M_i}{\xi_i}. \tag{3}$$

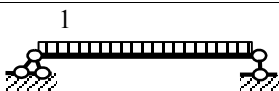
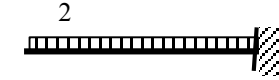
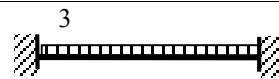
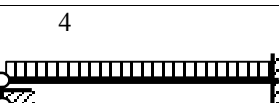
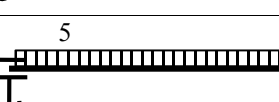
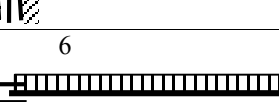
По этой условной распределенной массе с учетом первого корня λ частотного уравнения, взятого из табл. 1, находим приближенное значение частоты первого тона колебаний балки с сосредоточенными массами

$$\omega = \frac{\lambda^2}{l^2} \sqrt{EJ \sum \frac{\xi_i}{M_i}}. \tag{4}$$

Пример 4. Двухопорная балка с тремя одинаковыми массами $M=300$ кг испытывает удар неупругой массы $M_0=500$ кг, падающей с высоты $h=2$ см (рис. 4). Вычислить расчетный изгибающий момент.

Таблица 1

Частотные уравнения и коэффициенты приведения массы балок

Схема балки	Частотное уравнение	Первый корень, λ	Коэффициент приведения массы балки, ξ_0
	$\sin\lambda l = 0$	π	$\frac{3}{\pi^4} \frac{1}{\alpha^2(1-\alpha)^2}$
	$\operatorname{ch}\lambda l \cdot \cos\lambda l + 1 = 0$	1,875	$\frac{3}{1,875^4} \frac{1}{(1-\alpha)^3}$
	$\operatorname{ch}\lambda l \cdot \cos\lambda l - 1 = 0$	4,730	$\frac{3}{4,73^4} \frac{1}{\alpha^3(1-\alpha)^3}$
	$\operatorname{tg}\lambda l = \operatorname{th}\lambda l$	3,927	$\frac{12}{3,927^4} \frac{1}{\alpha^2(1-\alpha)^2(3-2\alpha-\alpha^3)}$
	$\cos\lambda l = 0$	$\pi/2$	$\frac{48}{\pi^4} \frac{1}{(1-\alpha)(1+\alpha-2\alpha^2)}$
	$\operatorname{tg}\lambda l + \operatorname{th}\lambda l = 0$	2,365	$\frac{12}{2,365^4} \frac{1}{(1-\alpha)^2(1+2\alpha-3\alpha^2)}$

1. Сначала заменим сосредоточенные массы (рис. 4, а) распределенной массой (рис. 4, б). Для этого по правилу Верещагина (рис. 4, в) находим единичные перемещения в точках приложения масс

$$\delta_{11} = \frac{3}{256} \frac{l^3}{EJ} = \delta_{33}, \quad \delta_{22} = \frac{l^3}{48EJ}.$$

2. Зная точное значение частоты первого тона колебаний двухопорной балки с распределенной массой, находим коэффициенты приведения сосредоточенных масс

$$\frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m_1}} = \sqrt{\frac{256EJ}{3l^3 m_1 l \xi_1}}$$

откуда

$$\xi_1 = \frac{256}{3 \cdot \pi^4} = 0,876 = \xi_3, \quad \xi_2 = \frac{48}{\pi^4} = 0,4927.$$

3. По формуле (3) находим суммарную интенсивность условной распределенной массы

$$l \sum m_i = \frac{M_1}{\xi_1} + \frac{M_2}{\xi_2} + \frac{M_3}{\xi_3} = M \left(2 \frac{1}{0,876} + \frac{1}{0,4927} \right) = 4,3127M = ml.$$

4. Вычисляем приближенное значение частоты первого тона колебаний заданной балки с тремя сосредоточенными массами

$$\omega = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{4,3127} \cdot \frac{l}{M}} = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{3,68 \cdot 10^6}{4,3127} \cdot \frac{4}{300}} = 65,8 \text{ 1/с.}$$

5. Для расчета балки на удар по массе M_1 приводим всю распределенную массу балки в точку удара

$$M_{\text{пр}} = \xi_1 ml = 0,876 \cdot 4,3127 \cdot 300 = 1133,34 \text{ кг.}$$

6. Находим коэффициент передачи энергии

$$\eta = \frac{M_0}{M_0 + M_{\text{пр}}} = \frac{500}{500 + 1133,34} = 0,306.$$

7. Вычисляем квазистатический прогиб от падающего груза

$$f = \delta_{11} M_0 g = \frac{3}{256} \frac{500 \cdot 9,81 \cdot 4^3}{3,68 \cdot 10^6} = 9,997 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

8. Динамический коэффициент при ударе

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2P}{f} \eta} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 2}{0,09997} \cdot 0,306} = 4,639.$$

9. Динамический изгибающий момент

$$M_d = \frac{3}{16} M_0 g l = \frac{3}{16} 500 \cdot 9,81 \cdot 4 \cdot 4,639 = 17,066 \cdot 10^3 \text{ Нм,}$$

а напряжение $\sigma = 92,75 \text{ МПа.}$

Такой упрощенный способ расчета применим и при продольных или крутильных колебаниях.

Например, на стержень длиной l с погонной массой m имеется сосредоточенная масса $M=3ml$ (рис. 5). Вычислить частоту первого тона колебаний.

На основании уравнения линейных перемещений сечений стержня при колебаниях [5]

$$u(x) = \frac{N_0}{kEF} \sin kx$$

из условия $N(l) = N_0 \cos kl = 0$ находим первый корень $kl = \pi/2$ и частоту основного тона колебаний стержня с погонной массой m

$$\omega = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{EF}{m}}.$$

Частота колебаний стержня от приведенной массы $m \xi_0$ равна

$\omega = \sqrt{\frac{EF}{l \cdot m \xi_0}}$. Из равенства частот находим коэффициент приведения массы

стержня $\xi_0 = 4/\pi^2 = 0,4053$.

Теперь можно найти приближенное значение частоты колебаний стержня с погонной и сосредоточенной массой

$$\omega = \sqrt{\frac{EF}{l(3,4053)ml}} = \frac{0,5419}{l} \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

Точное значение $\omega = \frac{0,5472}{l} \sqrt{\frac{EJ}{m}}$.

В заключение покажем погрешность способа приведения масс, широко используемого на практике. Рассмотрим двухпорную балку с равномерно распределенной массой m (первая схема в табл. 1) и уравнением изогнутой оси $y(x) = a \sin \frac{\pi x}{l}$, которое хорошо согласуется с граничными условиями, что должно обеспечить достаточно высокую точность приближенного способа.

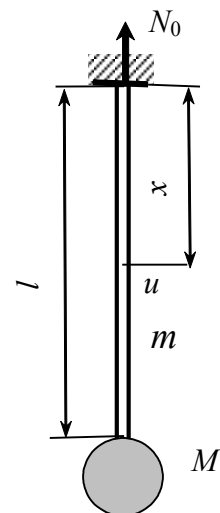


Рис. 5

Приведенная масса балки в этом способе вычисляется по формуле

$$M_{\text{пр}} = m \frac{\int_0^l y^2(x) dx}{y^2(x)} = \frac{ml}{2} \frac{1}{\left(\sin \frac{\pi x}{l}\right)^2} = m \xi_{\text{пр}}, \quad \xi_{\text{пр}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(\sin \frac{\pi x}{l}\right)^2}. \quad (5)$$

В предложенном упрощенном способе расчета, который приводит к точному значению основной частоты собственных колебаний балки, коэффициент приведения массы ξ_0 находим из равенства

$$\frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} m \xi_0}}.$$

А так как единичные перемещения в двухопорной балке определяются формулой

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{EJ} \frac{\alpha^2(1-\alpha)^2}{3},$$

(где αl – расстояние от опоры до места приведения массы), то из равенства частот находим значение коэффициента приведения масс, обеспечивающего точное значение основной частоты собственных колебаний балки с распределенной массой

$$\xi_0 = \frac{3}{\pi^4} \frac{1}{\alpha^2(1-\alpha)^2}. \quad (6)$$

Аналогичные формулы коэффициента приведения масс

$$\xi_0 = \frac{3}{\lambda^4} \frac{1}{EJ \delta_{11}} \quad (7)$$

можно получить для различных случаев опирания балок (см. табл. 1).

Таким упрощенным способом легко решаются балки с распределенными параметрами при наличии сосредоточенной массы. В этом случае к сосредоточенной массе M добавляется приведенная масса балки $m \xi_0$, а затем вычисляется частота колебаний условной балки

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11}(M + m \xi_0)}}. \quad (8)$$

Единичные коэффициенты можно выразить через коэффициенты приведения масс из зависимости

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{\lambda^4 EJ \xi_0}. \quad (9)$$

В табл. 2 приведены коэффициенты приведения массы двухопорной балки для некоторых сечений рассмотренными двумя способами и показана погрешность способа приведения масс

Таблица 2

Коэффициенты приведения массы двухопорной балки

α	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6
ξ_0	0,4927	0,6237	0,8760	1,2030	1,5966
ξ	0,5000	0,6667	1,0000	1,4172	2,0000
%	1,48	6,89	14,15	20,15	25,27

Оценка точности предложенного упрощенного динамического расчета приведена в табл. 3, где при различном отношении сосредоточенной массы, приложенной посередине пролета балки, к

ее собственной массе показана погрешность упрощенного вычисления основной частоты собственных колебаний по отношению к его точному значению.

Таблица 3

Значения коэффициента λ в формуле частоты основного тона колебаний для первых трех схем балок, представленных в табл. 1, в точном и упрощенном решении при отношении $\xi = M / ml = 0...5$

Схема балки	0	0,1	0,2	0,5	1,0	2,0	3,0	5,0
1	π	3,0013	2,8873	2,6395	2,3832	2,0959	1,9262	0,7198
	π	2,9998	2,8851	2,6369	2,3833	2,0948	1,9254	0,7192
	-	0,050 %	0,074 %	0,090%	0,080%	0,057%	0,043%	0,030%
2	1,876	1,7204	1,6140	1,4199	1,2479	1,0762	0,9812	0,9700
	1,876	1,7201	1,6135	1,4177	1,2465	1,0754	0,9807	0,8697
	-	0,020%	0,030%	0,160%	0,114%	0,069%	0,050%	0,032%
3	4,730	4,4698	4,2668	3,8471	3,4377	2,9973	2,7454	2,4442
	4,730	4,4637	4,2589	3,8394	3,4372	2,9958	2,7446	2,4437
	-	0,122%	0,185%	0,199%	0,161%	0,050%	0,030%	0,020%

Выводы:

1. Если в задаче требуется вычислить частоту основного тона колебаний однопролетной балки с распределенной массой, то нет необходимости пользоваться приближенными способами, так как спектр частот определяется из известных частотных уравнений, приведенных в справочной литературе или легко находится из уравнения изогнутой оси балки при собственных колебаниях.

2. При наличии на балке с распределенной массой дискретных масс, в упрощенном расчете всю массу балки следует привести в сечение с возмущающей нагрузкой с коэффициентом приведения масс (3).

3. Известный способ приведения масс дает заниженные значения частот колебаний, т.е. завышенный динамический коэффициент, с возрастающей погрешностью при приближении точки приведения масс к опорам балки.

1. Киселев В.А. *Строительная механика: Специальный курс. Динамика и устойчивость сооружений.* – М.: Стройиздат, 1964. – 332 с. 2. *Прочность, устойчивость, колебания. Том 3: Справочник / Под общей редакцией И.А. Биргера и Я.Г. Пановко.* – М.: Машиностроение, 1968. – 567 с. 3. Шевченко Ф.Л., Жеданов С.А. *Сопротивление материалов: Специальный курс. Метод начальных параметров.* – К.: УМК ВО, 1992. – 184 с. 4. Шевченко Ф.Л., Толкачев А.Ф., Нижник А.В. *Задачи по сопротивлению материалов.* – Донецк: РИА ДонНТУ, 2004. – 221 с. 5. Шевченко Ф.Л. *Будівельна механіка: Спеціальний курс. Динаміка пружних стержневих систем.* – Донецьк: РІА ДонНТУ, 2000. – 292 с.